

M2 MFA – Agrégation de Mathématiques

Loi des événements rares

On peut retrouver l'énoncé en exercice non-corrigé avec indications dans [GK], page 356.

Exercice 1. *loi des événements rares*

Soit $(N_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers tendant vers l'infini. On suppose que pour tout n , $A_{n,1}, \dots, A_{n,N_n}$ sont des événements indépendants avec $\mathbb{P}(A_{n,k}) = p_{n,k}$. On suppose également que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k} = \lambda > 0 \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{1 \leq k \leq N_n} p_{n,k} = 0.$$

Montrer que $\sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ .

1 Solutions

Solution 1 On pose dans la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}, \quad m_n = \max_{k=1}^{N_n} (p_{n,k}), \text{ et } s_n = \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}.$$

L'idée est, comme dans la preuve du TCL de Lindeberg, d'approcher la somme de variables de Bernoulli S_n par une somme de variables indépendantes de même type que la loi limite.

Méthode 1 : la première solution, avec les fonctions caractéristiques, suit les indications de [GK]. La comparaison entre la somme de Bernoulli et la somme de Poisson se fait au niveau des fonctions caractéristiques. On a aisément

$$\phi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{N_n} ((1 - p_{n,k}) + p_{n,k}e^{it}).$$

Mais si les $P_{n,k}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $p_{n,k}$ et que

$$S'_n = \sum_{k=1}^{N_n} P_{n,k},$$

$$\phi_{S'_n}(t) = \prod_{k=1}^{N_n} \phi_{P_{n,k}}(t) = \prod_{k=1}^{N_n} (\exp(p_{n,k}(e^{it} - 1))) = \exp(s_n(e^{it} - 1)).$$

On a vu, lors de la preuve du théorème central limite de Lindeberg, que le module de la différence de deux produits de nombres complexes dont les modules ne dépassent pas un, n'excède pas la somme des différences des modules. Or, une fonction caractéristique prend toujours ses valeurs dans le disque unité, donc

$$\begin{aligned} |\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| &= \left| \prod_{k=1}^{N_n} \phi_{\mathbb{1}_{n,k}}(t) - \prod_{k=1}^{N_n} \phi_{P_{n,k}}(t) \right| \\ &= \left| \prod_{k=1}^{N_n} ((1 - p_{n,k}) + p_{n,k}e^{it}) - \prod_{k=1}^{N_n} (\exp(p_{n,k}(e^{it} - 1))) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_n} g(p_{n,k}(e^{it} - 1)), \end{aligned}$$

avec $g(z) = |e^z - 1 - z|$. Mais

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= z^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

d'où

$$|g(z)| \leq |z|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \leq |z|^2 \frac{e^{|z|}}{2}.$$

Avec les inégalités $|p_{n,k}(e^{it} - 1)| \leq 2p_{n,k} \leq 2$, on obtient

$$|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| \leq \sum_{k=1}^{N_n} (2p_{n,k})^2 \frac{e^2}{2} = 2e^2 \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}^2 \leq 2e^2 s_n m_n.$$

Comme s_n tend vers λ et que m_n tend vers zéro, $|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)|$ tend vers zéro. Maintenant,

$$\begin{aligned} |\phi_{S_n}(t) - \exp(\lambda(e^{it} - 1))| &\leq |\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| + |\phi_{S'_n}(t) - \exp(\lambda(e^{it} - 1))| \\ &\leq |\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| + |\exp(s_n(e^{it} - 1)) - \exp(\lambda(e^{it} - 1))|, \end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 puisque s_n tend vers λ .

On conclut avec le théorème de Lévy.

Méthode 2 : On utilise l'inégalité de Le Cam (voir [GK] p. 186), où elle est démontrée par une méthode de couplage. Soit k un entier naturel quelconque. On a

$$|\mathbb{P}(S_n = k) - \mathcal{P}(\lambda)(k)| \leq |\mathbb{P}(S_n = k) - \mathcal{P}(s_n)(k)| + |\mathcal{P}(s_n)(k) - \mathcal{P}(\lambda)(k)|$$

La convergence de $\mathcal{P}(s_n)(k)$ vers $\mathcal{P}(\lambda)(k)$ découle immédiatement de la convergence de s_n vers λ . Pour le premier terme, l'inégalité de Le Cam donne

$$|\mathbb{P}(S_n = k) - \mathcal{P}(s_n)(k)| \leq \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}^2 \leq m_n s_n,$$

qui converge vers 0, comme vu précédemment. Cette convergence pour tout k fixé suffit à entraîner la convergence en loi (voir par exemple [GK] corollaire 11.1.5 page 267).