Théorème de Ramsey et compacité

Meven Bertrand

19 février 2018

Définition 0.1 (Coloration)
Dans la suite, on appellera coloration à c couleurs d'un ensemble E une fonction $f : \mathcal{P}_2(E) \to [\![1; c]\!]$ dont l'ensemble de départ est l'ensemble des paires de E.
Cela revient à se donner une coloration des arêtes du graphe complet de sommets E.

Théorème 0.2 (Théorème de Ramsey infini)
Pour tout entier c, pour pour ensemble infini E, pour toute coloration f de E à c couleurs, il existe un $E' \subseteq E$ tel que la restriction de f aux paires de E' soit constante.
"Toute coloration des arêtes d'un graphe complet infini admet une clique infinie monochrome."

Démonstration
On construit par récurrence sur n des ensembles E_n, des éléments $x_n \in E$ et des couleurs $c_n \in [\![1; c]\!]$ tels que pour tout i, on ait

— E_n est infini,
— $E_n \supseteq E_{n+1}$,
— $x_i \in E_{i-1}$ (avec la convention $E_{-1} = E$),
— pour tout $y \in E_i$, $f(\{x, y\}) = c_i$.

Pour l'initialisation, on prend $x_0 \in E$ quelconque, et on partitionne $E \backslash \{x\}$ en les $F_i = \{y \in E \mid y \neq x \wedge f(\{x, y\}) = i\}$. Au moins un de ces F_i est infini, et c'est lui qu'on prend pour E_0, et la couleur correspondante est prise pour c_0.
Pour l'hérédité, supposant E_n construit, on effectue le même raisonnement que pour l'initialisation, mais avec E_n à la place de E, et on obtient x_{n+1}, E_{n+1} et c_{n+1} vérifiant les propriétés désirées.

Une fois les trois suites construites, on construit une extractrice φ telle que la suite $(c_{\varphi(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ soit constante, qui existe car $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans un ensemble fini. On pose alors c' cette constante et $E' = \{x_{\varphi(i)}, i \in \mathbb{N}\}$, qui est infini. De plus, si on prend $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i < j$, alors $x_{\varphi(j)} \in E_{\varphi(j)-1} \subseteq E_{\varphi(i)}$ et donc $f(\{x_{\varphi(i)}, x_{\varphi(j)}\}) = c'$. Donc E' vérifie la propriété recherchée.

Théorème 0.3 (Théorème de Ramsey fini)
Pour tous entiers a et c, il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que si E est un ensemble de cardinal au moins b, et f est une coloration à c couleurs de E, alors il existe $E' \subseteq E$ de cardinal a tel que f restreinte aux paires de E soit constante.
"Pour tout nombre de couleurs c et taille de clique a, il existe un b tel que toute coloration des arêtes d'un graphe complet à plus de b sommets en c couleurs admet une a-clique monochrome."

Démonstration
On va utiliser le théorème de compacité de la logique du premier ordre pour montrer que si le théorème fini est faux, alors le théorème infini également — et obtenir le résultat recherché par contraposition. Supposons donc qu'il existe des entiers a, c tels que pour tout $b \in \mathbb{N}$, il existe (E_b, f_b) un ensemble et une coloration à c couleurs sur cet ensemble, tel qu'il n'y ait pas de a clique monochromatique de (E_b, f_b).

On se donne maintenant le langage $\mathcal{L} = \{P_i/2, i \in [\![1; c]\!]\} \cup \{= /2\}$ (égalité d'arité 2, et un symbole binaire par couleur, qu'on interprétera étant donné une c-coloration f par $P_i(x, y) \Leftrightarrow f(\{x, y\}) = i$). On considère également les formules suivantes :

— $\varphi_1 ::= \forall\, x, y,\ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq c} \neg(P_i(x,y) \wedge P_j(x,y))$ (il y a au plus un P_i vrai par paire)

— $\varphi_2 ::= \forall\, x, y,\ \bigvee_{1 \leq i \leq c} P_i(x,y)$ (il y a au moins un P_i de vrai par paire)

— $\varphi_3 ::= \forall\, x, y,\ \bigwedge_{1 \leq i \leq c} P_i(x,y) \leftrightarrow P_i(y,x)$ (la relation P_i est symétrique)

— $\varphi ::= \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ (les P_i correspondent bien à une coloration à c couleurs)

— $clique_i(x_1, \ldots, x_a) ::= \bigwedge_{1 \leq m < n \leq a} P_i(x_m, x_n)$ ($x_1, \ldots, x_a$ forment une clique monochromatique de couleur i)

— $\psi ::= \forall\, x_1, \ldots, x_a,\ ,\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq a} x_i \neq x_j\right) \to \bigwedge_{1 \leq i \leq c} \neg clique_i(x_1, \ldots, x_a)$ (il n'y a pas de clique monochromatique de taille a)

— $\sigma_b ::= \exists\, x_1, \ldots, x_b,\ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq b} x_i \neq x_j$ (il y a au moins b éléments différents)

Et les théories $\Gamma_b = \{\varphi, \psi\} \cup \bigcup_{b' \leq b} \{\sigma_b\}$ et $\Gamma = \{\varphi, \psi\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{N}} \{\sigma_b\}$.

Alors si Γ' est un fragment fini de Γ, il est inclus dans un certain Γ_b, dont (E_b, f_b) fournit un modèle. Par conséquent Γ est finiment satisfiable, donc satisfiable. Mais un modèle de Γ fournit un ensemble E infini et une coloration f à c couleurs sur E qui n'admet aucune clique monochromatique de taille a, donc a fortiori infinie, et il y a contradiction avec le théorème de Ramsey infini.

Par conséquent, le théorème de Ramsey fini est démontré par contraposition.