## 24 Théorème de Kakutani et Massera

ref : Gonnord-Tosel les deux

THÉORÈME 24.1 (KAKUTANI) *Soit $E$ un espace vectoriel normé et $K$ un compact convexe non vide de $E$. Toute application affine continue $T : E \to E$ stabilisant $K$ admet un point fixe dans $K$.*

PREUVE. L'idée est d'itérer un point du compact sous l'application $T$ et de regarder les moyennes de Cesaro de cette suite $(T^n(a))$.

Pour $a \in K$, on pose donc :

$$x_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(a)$$

Comme $K$ est stable par $T$, $T^k(a) \in K$ pour tout $k \geq 0$ et par convexité de $K$ les barycentres à coefficients positifs de ces points sont dans $K$ et c'est le cas des $x_n$.

Comme $K$ est compact, quitte à extraire, on peut supposer que $(x_n)$ converge vers $x \in K$. Il reste à montrer que $x$ est un point fixe de $T$.

Estimons pour cela la différence $\|T(x) - x\|$ :

$$\begin{aligned}
T(x_n) - x_n &= T(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(a)) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(a) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^{k+1}(a) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(a) \qquad \text{car } T \text{ est affine} \\
&= \frac{1}{n+1}(T^{n+1}(a) - a)
\end{aligned}$$

Or $\|T^{n+1}(a) - a\|$ est bornée par le diamètre de $K$, donc $\|T(x_n) - x_n\|$ tend vers 0.

On découpe pour finir :

$$\|T(x) - x\| \leq \|T(x) - T(x_n)\| + \|T(x_n) - x_n\| + \|x_n - x\|$$

où $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\|T(x) - T(x_n)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par continuité de $T$. D'où $x$ est un point fixe de $T$.

□

Un exemple d'application affine apparait dans la méthode de la variation de la constante dans les équations différentielles linéaires. L'application du théorème précédent dans ce cadre donne lieu au théorème suivant.

COROLLAIRE 24.2 (MASSERA) *Soit $T > 0$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues et $T$-périodiques.*

*Si l'équation différentielle linéaire $x' = Ax + b$ admet une solution bornée sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une solution $T$-périodique.*

Le flot de l'équation différentielle est défini pour tout temps d'après un théorème fondamental des équations différentielles linéaires, notons $\varphi^t(x_0)$ la valeur en $t$ de la solution valant $x_0$ en 0 (attention le champ n'est pas autonome, on fait un choix arbitraire dans $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$).

La méthode de la variation de la constante s'exprime ainsi en faisant intervenir la résolvante :

On note $R(t) \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ la solution du système linéaire sans second membre :

$$R'(t) = A(t)R(t) \quad \text{et} \quad R(0) = I_n$$

On a alors :

$$\varphi^t(x_0) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s$$

Pour tout temps $t$, $\varphi^t$ est une application affine. Un point périodique de période $T$ correspond à un point fixe de $\varphi^T$, il reste à trouver un compact convenable où appliquer le théorème de Kakutani.

Soit $x = \varphi(x_0)$ la solution bornée donnée par l'hypothèse et posons :

$$X = \{x(nT) = \varphi^{nT}(x_0) | n \in \mathbb{Z}\}$$

$X$ est borné.

Comme le champ est $T$-périodique, on a une propriété de flot plus faible que pour un champ autonome :

$$\varphi^{t+T}(a) = \varphi^t \circ \varphi^T(a)$$

En effet, on vérifie qu'elles ont même dérivée et coïncident en 0, puis on utilise l'unicité des solutions.

En particulier, $\varphi^T$ stabilise $X$ :

$$\varphi^T(\varphi^{nT}(x_0)) = \varphi^{(n+1)T}(x_0) \in X$$

Comme $\varphi^T$ est affine, elle stabilise $\mathrm{conv}(X)$. De plus $P$ est continue donc stabilise $\overline{\mathrm{conv}(X)}$ qui est un convexe compact (car fermé borné dans $\mathbb{R}^n$) non vide.

Par le théorème de Kakutani, $\varphi^T$ admet un point fixe, c'est-à-dire le champ affine a une solution périodique.

Leçons concernées : points fixes, equa diff linéaire, utilisation de la convexité en analyse.