THÉORÈME DE LIE-KOLCHIN

Le groupe T des matrices triangulaires supérieures inversibles à coefficients complexes est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui a le bon goût d'être résoluble (pour une preuve, voir la référence citée plus bas). L'objectif est de montrer une réciproque partielle à ce résultat :

Théorème (Lie, Kolchin)**.** *Soit G un sous-groupe* connexe *résoluble de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Alors G est conjugué à un sous-groupe de T. En d'autres termes, G est cotrigonalisable.*

Avant d'attaquer la preuve, on rappelle les faits suivants :

Rappels. *Soit G un groupe. On note $DG := < g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}, g_1, g_2 \in G >$ le groupe dérivé, engendré par les commutateurs. On dit qu'un groupe est résoluble s'il admet une suite décroissante de sous-groupes $(G_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que $G_0 = G$, $G_n = \{1\}$, G_{i+1} est distingué dans G_i et G_i/G_{i+1} est abélien pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On a alors :*

(1) G est résoluble si et seulement si $D^nG = \{1\}$ pour un entier n
(2) Si G est résoluble et $\phi \colon G \to H$ est un morphisme, alors $\phi(G)$ est résoluble
(3) D^iG est caractéristique, donc distingué dans G pour tout $i \geq 1$.

On aura aussi besoin d'un lemme :

Lemme. *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ connexe. Alors DG est connexe.*

Preuve. Soit G un tel sous-groupe et S l'ensemble de ses commutateurs. On a une application continue

$$\begin{cases} G \times G & \longrightarrow & S \\ s, t & \mapsto & sts^{-1}t^{-1} \end{cases}$$

donc S est connexe. Considérons S_m l'ensemble des produits de m éléments de S. L'application

$$\begin{cases} S^m & \longrightarrow & S_m \\ s_1, \dots, s_m & \mapsto & s_1 \cdots s_m \end{cases}$$

est continue donc puisque S^m est connexe, S_m est connexe. On conclut en remarquant que $1 \in S_m$ pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et $DG = \{1\} \bigcup \cup_m S_m$. $\square$

Démonstration du théorème. Si G est abélien, le résultat est classique (en particulier le cas $n = 1$ est prouvé). On raisonne donc par récurrence en supposant que pour un $n \geq 2$, le résultat soit vrai en toute dimension $m < n$ et sous l'hypothèse que G n'est *pas* abélien.

Supposons d'abord qu'il existe un sous-espace $V \subset \mathbf{C}^n$ non trivial (distinct de $\{0\}$ et $\mathbf{C}^n$) qui soit stable par G (c'est-à-dire par tout élément de G). On choisit alors un supplémentaire W de V. Dans une base adaptée, tout élément g de G s'écrit

$$\begin{pmatrix} g_1 & \star \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

Les applications

$$\begin{cases} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & g_1 = g_{|V} \end{cases}, \qquad \begin{cases} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(W) \\ g & \mapsto & g_2 = \pi_W \circ g_{|W} \end{cases}$$

où π_W est la projection sur W parallèlement à V, sont des morphismes de groupe continus, donc d'image connexe et résoluble. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une base de V et une de W telle que toutes les matrices g_1, g_2 soit triangulaires supérieures ; dans la base obtenue par recollement, la matrice de tout élément de G est donc triangulaire supérieure.

Montrons maintenant qu'il existe toujours un sous-espace stable non trivial.

On considère $m \geq 2$ le plus petit entier non nul tel que $D^m G = \{1\}$. On pose alors $H = D^{m-1}G \neq \{1\}$, et on définit P l'ensemble des vecteurs non nuls qui sont propres pour tout élément de H. On va montrer qu'il existe un élément x dans P est que $\mathrm{Vect}(G \cdot x)$ convient.

Etape 1. On a $DH = D^m G = \{1\}$ de sorte que H est abélien donc cotrigonalisable. Il existe alors un drapeau complet stabilisé par H ; en particulier le premier espace du drapeau est une droite stable par H, engendrée par un vecteur x non nul qui est donc dans P.

Etape 2. Soit $g \in G$. Alors H est un groupe dérivé donc est distingué dans G et $g^{-1}hg$ est un élément de H. Notons λ sa valeur propre associée à x. On a :

$$h(g(x)) = gg^{-1}hg(x) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

de sorte que $g(x)$, qui est non nul puisque g est inversible, est dans P.

Etape 3. Soit Λ_y l'application continue qui pour $y \in P$ fixé associe à un élément h de H sa valeur propre en y. Alors on a vu précédemment que $\Lambda_{g(x)}(h) = \Lambda_x(g^{-1}hg)$, de sorte que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ g & \mapsto & \Lambda_{g(x)}(h) \end{array} \right.$$

est continue, pour un $h \in H$ donné. Son image est donc connexe mais est finie puisque incluse dans le spectre de h. L'image est alors réduite à un point et par linéarité $\mathrm{Vect}(G \cdot x)$ est un espace propre pour tout élément de H et stable par G.

Etape 4. Supposons par l'absurde que $\mathrm{Vect}(G \cdot x) = \mathbf{C}^n$. Le groupe H est ainsi constitué d'homothéties. Mais le déterminant d'un commutateur est toujours 1 ; comme $m - 1 \geq 1$, H est engendré par des commutateurs et on a donc que si $h \in H$ est une homothétie de rapport λ, $\det(h) = \lambda^n = 1$. Ainsi H est un groupe fini ; par le lemme il est connexe et donc réduit à un élément. Ceci est une contradiction, et $\mathrm{Vect}(G \cdot x)$ est un sous-espace stable non trivial.

□

Remarques. Le résultat s'étend aisément à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ en ajoutant la condition que tout élément de G soit trigonalisable.

Il s'étend aussi à $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos en considérant la toplogie de Zariski sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Sur $\mathbf{C}$ cela renforce le résultat puisque la topologie de Zariski qui est moins fine a donc plus de connexes.

References

1. A. Chambert-Loir, *Algèbre corporelle.*, Springer (2005), p.93
2. Wikipedia, *Théorème de Lie-Kolchin*, `https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Lie-Kolchin`, consultée le 10/10/2017.