Leçons :
124 : Anneau des séries formelles
140 : Corps des fractions rationnelles
152 : Déterminant

Caractérisation de $\mathbb{K}(X)_0$
Séries formelles et fractions rationnelles

49

Références :
Arnaudiès Bertin

Thm : Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}(X)_0 = \{ f \in \mathbb{K}(X) \mid 0 \text{ n'est pas un pôle de } f \}$

Soit $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]] \setminus \mathbb{K}[X]$

Alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $S \in \mathbb{K}(X)_0$

(ii) $\exists N \geq 1 \ \exists m \geq N \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}, \lambda_N \neq 0$
tq $\forall n > m \quad a_n - \lambda_1 a_{n-1} - \dots - \lambda_N a_{n-N} = 0$

(iii) $\exists N \in \mathbb{N}^* \ \forall n \geq N \ \det(A_n) = 0$ où $A_n = (a_{i+j})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$

preuve :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Par définition, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tels que $U \wedge V = 1$, $VS = U$, $\deg V \geq 1$, $V = 1 - \lambda_1 X - \dots - \lambda_N X^N$ avec $\lambda_N \neq 0$. $(N \geq 1)$

Pour $n \geq N$, le coefficient devant X^n dans la série formelle

$$VS = (1 - \lambda_1 X - \dots - \lambda_N X^N) \sum_{j \geq 0} a_j X^j$$

est $a_n - \lambda_1 a_{n-1} - \dots - \lambda_N a_{n-N}$.

On pose $m = \max(\deg U, N)$. $\forall n > m \quad a_n - \lambda_1 a_{n-1} - \dots - \lambda_N a_{n-N} = 0$ □

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Avec ces notations, on pose $V(X) = 1 - \lambda_1 X - \dots - \lambda_N X^N$
$\forall n > m$ le coefficient devant X^n dans VS est nul (cf (i) $\Rightarrow$ (ii))
Donc $VS \in \mathbb{K}[X]$. D'où (i) □

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Gardons les notations de (ii).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $C_0, C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A_n.

Soit $n > m$. D'après (ii) : $C_n = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_{n-i}$ car $A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$

Donc $\det A_n = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : • MQ la suite $\det(A_n)$ n'est pas identiquement nulle.
On note $q = \operatorname{val}_X S$, alors $A_q = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_q \\ \vdots & & \diagup & \\ 0 & \diagup & & (*) \\ a_q & & & \end{bmatrix}$ donc $\det A_q = (-1)^{\frac{(q+2)(q+3)}{2}} a_q^{q+1}$

donc $\det A_q \neq 0$

- On note p l'entier unique tel que $\det A_p \neq 0$ et $\forall n > p \ \det A_n = 0$

  On pose $m = p+1$

- $\det A_p \neq 0$ donc les m premières colonnes de A_m sont libres.

  $\det A_m = 0$ donc il existe $N \leqslant m$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$, $\lambda_N \neq 0$

  tq $\forall n \in [\![m, 2m]\!] \quad a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \dots + \lambda_N a_{n-N} \quad (*)$

Pour $j \in [\![m, +\infty [\![$, on pose $\alpha_j = a_j - \lambda_1 a_{j-1} - \dots - \lambda_N a_{j-N}$

D'après $(*)$, $\alpha_j = 0$ si $j \in [\![m, 2m]\!]$.

Il s'agit de mq $\alpha_j = 0 \ \forall j \geqslant m$.

Soit $k \geqslant 1$, supposons que $\alpha_j = 0$ pour $j \in [\![m, 2m+k-1]\!]$

MQ $\alpha_{2m+k} = 0$

On note $C_0, C_1, \dots, C_{m+k}$ les colonnes de A_{m+k}

$$A_{m+k} = \left[\begin{array}{c|ccc} A_p & a_m & \cdots & a_{m+k} \\ & \vdots & & \\ \hline (*) & a_{2m} & \cdots & a_{2m+k} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{2m+k-1} & & \\ & a_{2m+k} & \cdots & a_{2m+2k} \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow m \\ \\ \updownarrow k+1 \end{array}$$

On fait $C_{m+k} \leftarrow C_{m+k} - \lambda_1 C_{m+k-1} - \dots - \lambda_N C_{m+k-N}$

$\vdots$

$C_m \leftarrow C_m - \lambda_1 C_{m-1} - \dots - \lambda_N C_{m-N}$

On trouve $0 = \det A_{m+k} = \begin{vmatrix} A_p & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{2m+k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2m+k} & \cdots & \alpha_{2m+2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0) & & \alpha_{2m+k} \\ & & (*) \\ \alpha_{2m+k} & & \end{pmatrix}$

$$= \underbrace{\det A_p}_{\neq 0} \det B$$

D'où $\det B = 0$, et finalement $\alpha_{2m+k} = 0$.

D'où $\alpha_j = 0 \ \forall j \geqslant m$ par récurrence $\square$