

# Quelques ordres moyens

Leçons : 223, 224, 230

## Définition 1

Un ordre moyen de  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\sum_{1 \leq n \leq x} f(n) \sim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq n \leq x} g(n)$ .

## Proposition 2

Un ordre moyen de  $\sigma : n \mapsto \sum_{d|n} d$  est  $x \mapsto \frac{\pi^2}{12}x$  et  $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(x \ln x)$ .

**Démonstration.** Si  $x \geq 1$ , on a

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n=1}^{E(x)} \sum_{d|n} d = \sum_{\substack{(d,m) \in \llbracket 1, E(x) \rrbracket \\ dm \leq x}} d = \sum_{m=1}^{E(x)} \sum_{d=1}^{E(\frac{x}{m})} d = \sum_{m=1}^{E(x)} \frac{1}{2} E\left(\frac{x}{m}\right) \left(E\left(\frac{x}{m}\right) + 1\right)$$

Or,  $E\left(\frac{x}{m}\right) \left(E\left(\frac{x}{m}\right) + 1\right) = \left(\frac{x}{m} - \left\{\frac{x}{m}\right\}\right) \left(\frac{x}{m} - \left\{\frac{x}{m}\right\} + 1\right) = \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{x}{m} O_u(1) + O_u(1)$   
 Donc en sommant, on a

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{m=1}^{E(x)} \left(\frac{x}{m}\right)^2 + O(1) \sum_{m=1}^{E(x)} \frac{x}{m} + O(x)$$

Or,  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$  et si  $m \geq 2$ , par comparaison série-intégrale,

$$\int_m^{m+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{m^2} \leq \int_{m-1}^m \frac{dt}{t^2}$$

soit en sommant pour  $m \in \llbracket E(x) + 1, +\infty \rrbracket$ ,

$$\frac{1}{E(x)+1} = \int_{E(x)+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{m^2} \leq \int_{E(x)}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{E(x)}$$

Donc  $\sum_{m > x} \frac{1}{m^2} \sim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ , en particulier,  $\sum_{m \leq x} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Par ailleurs, le même procédé de comparaison série-intégrale donne  $\sum_{m \leq x} \frac{1}{m} = \ln(x) + O(1)$  de sorte que

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{6}x^2 + O(x) + O(x \ln(x)) = \frac{\pi^2}{6}x^2 + O(x \ln(x))$$

ce qui est le résultat voulu. □

---

1.  $O_u$  désignant une notation  $O$  uniforme par rapport à  $x$

### Proposition 3

Un ordre moyen de l'indicatrice d'Euler  $\varphi$  est  $x \mapsto \frac{3}{\pi^2}x$  et  $\sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x)$ .

**Démonstration.** Selon la formule d'inversion de Möbius,  $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{md=n} \mu(d)m$ .

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \varphi(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{md=n} \mu(d)m = \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{m=1}^{E(\frac{x}{d})} m \\ &= \sum_{d \leq x} \mu(d) \frac{1}{2} E\left(\frac{x}{d}\right) \left(E\left(\frac{x}{d}\right) + 1\right) = \frac{x^2}{2} \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(x \ln x) \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la démonstration précédente et du fait que  $\mu(d) = O_u(1)$ .

Or, si  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left( \sum_{d=1}^N \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right) = \sum_{d=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\mu(d)}{(dk)^2} \stackrel{m=dk}{=} \sum_{m=1}^{N^2} \frac{1}{m^2} \sum_{d|m} \mu(d) = 1 \text{ puisque } \sum_{d|m} \mu(d) = 1 \text{ sauf si } m = 1.$$

Donc en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on a  $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$ . Ainsi,  $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x \ln x)$ .  $\square$

**Référence :** Gerald TENENBAUM (2015). *Introduction à la théorie probabiliste et analytique des nombres*. 4<sup>e</sup> éd. Belin, pp. 46-47, largement complété par Adrien Laurent.