

Théorème de Carathéodory et application aux équations diophantiennes

Leçons : 126, 181

Théorème 1 (Carathéodory)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit A une partie de E . Alors l'enveloppe convexe $\text{Conv}(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de $n + 1$ points de A .

Démonstration. Soit $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$ un élément de $\text{Conv}(A)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que p est le nombre minimal de termes intervenant dans une écriture comme combinaison convexe de x . Raisonnons par l'absurde, et supposons que $p \geq n + 2$

Soit

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^p &\longrightarrow E \times \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^p \lambda_i \right) \end{aligned}$$

Selon le théorème du rang, le noyau de ϕ a pour dimension $\dim(E \times \mathbb{R}) - \dim \text{Im } \phi \geq 1$ par hypothèse sur p . Donc on peut trouver $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$, de sorte que $\forall \tau \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \tau \lambda_i) x_i$ et $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \tau \lambda_i = 1$. Introduisons donc

$$F = \left\{ \tau \in \mathbb{R} \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i + \tau \lambda_i \geq 0 \right\} = \bigcap_{\lambda_i < 0} \left] -\infty, \frac{-\alpha_i}{\lambda_i} \right] \cap \bigcap_{\lambda_i > 0} \left[\frac{-\alpha_i}{\lambda_i}, +\infty \right[$$

Il existe donc $\lambda_j < 0$ et $\lambda_k > 0$ tels que $F = \left[-\frac{\alpha_j}{\lambda_j}, -\frac{\alpha_k}{\lambda_k} \right]$. Ainsi, $\tau = -\frac{\alpha_j}{\lambda_j} \in F$ et $x = \sum_{i \neq j} (\alpha_i + \tau \lambda_i) x_i$ est une écriture de x comme combinaison convexe de $p - 1$ éléments de $\{x_1, \dots, x_p\}$, ce qui contredit la minimalité de p . □

Corollaire 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Le système diophantien $Ax = 0$ admet une solution non nulle dans \mathbb{N}^n si et seulement si $0_{\mathbb{R}^n}$ est dans l'enveloppe convexe des colonnes de A .

Démonstration. On note A_i la i -ème colonne de A .

\Leftarrow : soit x solution non nulle dans \mathbb{N}^n , alors $0 = (A_1 \dots A_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i A_i$ donc en divisant par n , on obtient le résultat.

\Rightarrow : soit l minimal tel que 0 s'écrive comme combinaison convexe à l termes $\sum_{j=1}^l x_j A_{i_j}$ des colonnes de A . Selon le théorème de Carathéodory, en notant r le rang sur \mathbb{Q} de la matrice $(A_{i_1}, \dots, A_{i_l})$, on a $l \leq r + 1$. Mais puisqu'on a exhibé une relation de dépendance linéaire entre ces colonnes, $r < l$. Ainsi $r = l - 1$ et par l'algorithme du pivot de Gauss sur \mathbb{Q} , on peut trouver $P \in \text{GL}_l(\mathbb{Q})$ tel que $P(A_{i_1} \dots A_{i_l}) = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ où $M \in \mathcal{M}_{r, r+1}(\mathbb{Z})$ est de rang r .

Donc $\ker_{\mathbb{Q}} M$ est de dimension 1 sur \mathbb{Q} et de plus $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$ donc $x' = (x_1, \dots, x_r)$ est un vecteur directeur à coefficients positifs de $\ker_{\mathbb{Q}} M$.

Or $\ker_{\mathbb{Q}} M \subset \ker_{\mathbb{R}} M$ donc x' est également un vecteur directeur de $\ker_{\mathbb{R}} M$, de sorte que tous ses éléments ont leurs coefficients tous positifs ou tous négatifs. En multipliant x' par un coefficient bien choisi, on peut donc trouver $y' \in \mathbb{N}^r$ tel que $(A_{i_1} \dots A_{i_r})y' = 0$. On obtient $y \in \mathbb{N}^n$ tel que $Ay = 0$ en complétant y' avec des 0. \square

Corollaire 3

Si K est une partie compacte de \mathbb{R}^n , alors l'enveloppe convexe de K est compacte.

Référence : Xavier GOURDON (2009). *Les maths en tête : analyse*. 2^e éd. Ellipses, p.54 pour le théorème et la deuxième application. L'optimisation de la preuve et la première application sont dues à Benjamin Havret.