Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

1. Autour du théorème d'inversion locale

1.1. Les premiers contacts avec les énoncés.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in U$ et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ avec $k \geqslant 1$.

Théorème 1. (Inversion locale) Si la différentielle de f en p est inversible, alors il existe V un voisinage ouvert de p dans U telle que $f_{|V}$ soit un C^k-difféomorphisme sur son image et l'on a :

$$\mathrm{d}_{f(p)}(f^{-1}) = (\mathrm{d}_p f)^{-1}.$$

Contre-exemple 2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$ par :

$$f(x) := x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

L'application f est dérivable avec $f'(0) \neq 0$, mais elle n'est injective sur aucun voisinage de 0.

Corollaire 3. (Inversion globale) Si f est injective et que la différentielle de f en chaque point de U est inversible, alors f est un C^k-difféomorphisme sur son image.

Exemple 4. On définit l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$U :=]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[.$$

Alors, le changement de coordonnées polaires $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2 \setminus (] - \infty, 0] \times \{0\})$ défini par :

$$\varphi(r, \theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

est un C^1-difféomorphisme, puisque son jacobien en $(r, \theta) \in U$ est égal à r.

Application 5. On a l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.2. La variante holomorphe de l'inversion locale.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z \in U$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe.

Théorème 6. (Inversion locale holomorphe) Si $f'(z) \neq 0$, alors il existe V un voisinage ouvert de z dans U telle que $f_{|V}$ soit un biholomorphisme sur son image.

Exemple 7. Quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, l'application $z \mapsto z^n$ est un biholomorphisme local en tout point de point de $\mathbb{C}^*$.

1.3. Quelques exemples et applications frappantes...

1.3.1. *...en algèbre.*

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple 8. Soit $\ell \geqslant 1$, alors l'élévation à la puissance ℓ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de l'identité dans un voisinage de l'identité.

Exemple 9. L'application $\exp\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de la matrice nulle dans un voisinage de l'identité.

Application 10. Quels que soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \left[\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right]^k = \exp(A + B).$$

Application 11. Il existe un voisinage ouvert V de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que le seul sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ contenu dans V soit $\{I_n\}$.

Théorème 12. (d'Alembert-Gauss) Un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ s'annule sur $\mathbb{C}$.

1.3.2. *... en analyse complexe.*

Soient U un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe.

Théorème 13. Si f n'est pas constante au voisinage de z_0, alors il existe $k \in \mathbb{N}$, V un voisinage ouvert de z_0 et $g\colon V \to \mathbb{C}$ holomorphe avec $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$ qui satisfait :

$$\forall z \in V, f(z) = f(z_0) + g(z)^k.$$

En particulier, f est ouverte au voisinage de z_0.

Application 14. Si f est injective sur U, alors f est un biholomorphisme sur son image.

Exemple 15. Quel que soit $a \in \mathbb{C}$, on définit l'ouvert de $\mathbb{C}$ suivant :

$$U_a := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \mathrm{Im}(z) \in]a, a + 2\pi[\}.$$

Alors, l'exponentielle réalise un biholomorphisme de U_a sur $\mathbb{C}^*$.

Application 16. (d'Alembert-Gauss) Un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ s'annule sur $\mathbb{C}$.

Application 17. (Principe du maximum) Si l'application $|f|$ a un maximum dans U, alors f est une application constante.

1.3.3. *...en géométrie différentielle.*

Théorème 18. (Hadamard-Lévy) Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, alors il s'agit d'un C^1-difféomorphisme si et seulement si f est propre et que sa différentielle en chaque point est inversible.

Exemple 19. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|.$$

L'application f est un C^1-difféomorphisme.

Proposition 20. (Morse) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in U$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe $C^3(U, \mathbb{R})$. Si p satisfait $\mathrm{d}_p f \equiv 0$ et $\mathrm{d}^2{}_p f$ est de signature $(k, n - k)$, alors il existe V et W deux voisinages du point p dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi\colon V \to W$ un C^1-difféomorphisme tel que $\varphi(p) = p$ satisfaisant :

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)^2 - \sum_{j=k+1}^{n} \varphi_j(x)^2.$$

Application 21. Détermination de l'allure du portrait de phase du pendule pesant.

2. Autour du théorème des fonctions implicites

2.1. **Premier contact avec l'énoncé.**

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, (p, q) un point de U et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k(U, \mathbb{R}^n)$.

Théorème 22. (Fonctions implicites) Si $\mathrm{d}_{(p,q)} f_{|\{0\} \times \mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible, alors il existe V un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^m$, W un voisinage ouvert de q dans $\mathbb{R}^n$ avec $V \times W \subseteq U$ et une application $h\colon V \to W$ de classe $C^k(V, W)$ telle que :

$$\forall (x, y) \in V \times W, f(x, y) = f(p, q) \iff y = h(x).$$

Remarque 23. Le théorème 22 est équivalent au théorème 1.

2.2. **Une application remarquable.**

Proposition 24. Soient P_0 un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une racine simple, disons $x_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe V un voisinage de P_0 dans $\mathbb{R}[X]_{\leqslant \deg(P)}$, W un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $h\colon V \to W$ de classe $C^\infty(V, W)$ telle que :

$$\forall (P, x) \in V \times W, P(x) = 0 \iff x = h(P).$$

Application 25. L'ensemble des polynômes scindés à racines simples de $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ est ouvert.

3. Sur les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

3.1. **Définitions équivalentes et premiers exemples.**

Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Définition 26. L'ensemble M est une *sous-variété* de $\mathbb{R}^n$ de *dimension* d si et seulement si pour tout $p \in M$, il existe V un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^n$, W un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi\colon V \to W$ un C^1-difféomorphisme tel que :

$$\varphi(M \cap V) = W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

Théorème 27. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'ensemble M est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$.
2. Quel que soit $p \in M$, il existe V un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^n$ et $f\colon V \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion en tout point de V telle que l'on ait :
$$M \cap V = f^{-1}(\{0\}).$$
3. Quel que soit $p \in M$, il existe V un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^n$, W un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et $\phi\colon W \to \mathbb{R}^n$ une immersion en tout point de W telle que :
   - l'application ϕ envoie p sur 0,
   - l'application $\phi\colon W \to M \cap V$ soit un homéomorphisme.
4. Quel que soit $p \in M$, il existe V un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^n$, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et une application $h\colon U \to \mathbb{R}^{n-d}$ telle que :
$$M \cap V = \{(x, h(x)); x \in U\}.$$

Exemple 28. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $(f, g) \in C^1(I, \mathbb{R})^2$, on introduit alors :

$$S := \{(f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u)); (u, v) \in I \times \mathbb{R}\}.$$

On suppose que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- l'application f ne change pas de signe sur I,
- les applications f' et g' ne s'annulent pas en même temps sur I,
- l'application $u \mapsto (f(u), g(u))$ est un homéomorphisme sur son image.

Finalement, S est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

3.2. **Sur les sous espaces tangents d'une sous-variété.**

Soient M un sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $p \in M$.

Définition 29. On appelle espace tangent de M en p et on note T_pM l'ensemble suivant :

$$T_pM := \left\{\gamma'(0); \gamma \in C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, M) \text{ t.q. } \gamma(0) = p\right\}.$$

Proposition 30. Avec les notations de la définition 26 et du théorème 27, T_pM est :

1. $(\mathrm{d}_0\varphi^{-1})(\mathbb{R}^d \times \{0\})$,
2. $\ker(\mathrm{d}_p f)$,
3. $\mathrm{im}(\mathrm{d}_p\phi)$,
4. et si $h(0) = p$, alors $T_pM = \left\{(x, \mathrm{d}_0 h \cdot x), x \in \mathbb{R}^d\right\}$.

En particulier, T_pM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de même dimension que M.

Théorème 31. (Extrema liés) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f := (f_1, \dots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ une submersion en tout point de U, on introduit la sous-variété de codimension n de $\mathbb{R}^m$ suivante :

$$M := f^{-1}(\{0\}).$$

Soit $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ tel que $g_{|M}$ admette un extremum local en p, alors on a l'inclusion suivante :

$$T_pM \subseteq \ker(\mathrm{d}_p g).$$

De manière équivalente, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ uniques tels que l'on ait :

$$\mathrm{d}_p g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{d}_p f_i.$$

Application 32. (Inégalité d'Hadamard) Soit $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, on a :

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leqslant \|v_1\|_2 \cdots \|v_n\|_2,$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$.

Application 33. (Théorème spectral) Soit u un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^n$, alors u est diagonalisable en base orthornormée.

3.3. **Sur un théorème de Cartan et Von-Neumann.**

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Lemme 34. On introduit le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}.$$

Alors, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 35. Le lemme 34 est une conséquence de l'application 10.

Théorème 36. Le groupe G est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ dont l'espace tangent en l'identité est donné par $\mathfrak{g}$.

Remarque 37. Si G est connexe, alors $\exp(\mathfrak{g})$ engendre G.

Exemple 38. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(2n)$ et d'autres.

Contre-exemple 39. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ n'est pas une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Autres développements possibles

Théorème 13 et Application 16 (d'Alembert-Gauss)
Théorème 18 (Hadamard-Lévy) dans le cas C^2
Proposition 20 (Morse)
Théorème 31 (Extrema liés) et Application 33 (Théorème spectral)

Références

[1] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.*

[2] F. Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann.*

[3] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

[4] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.*

[5] R.Mneimné ; F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.*

[6] S. Gonnord ; N. Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation, Calcul Différentiel.*