<u>Références</u> :
Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Serge Francinou

Lemme. Un anneau euclidien est principal.

Démonstration. Soit A un anneau euclidien et $v : A\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ son stathme.
Soit I un idéal de A, $I \neq \{0\}$. Soit $b \in I, b \neq 0$ tel que $v(b)$ soit minimal.
Soit $a \in I$, on effectue la division euclidienne de a par b :

$$a = bq + r \text{ avec } r = 0 \text{ ou } v(r) < v(b).$$

On a alors $r = a - bq \in I$ et comme $v(b)$ est minimal pour les éléments non nuls de I, on a $r = 0$, donc $a \in (b)$ et on a bien $I = (b)$. □

Prop. $\mathbb{C}\left[T, \frac{1}{T}\right]$ *est principal.*

Démonstration. On va montrer que $\mathbb{C}\left[T, \frac{1}{T}\right]$ est euclidien et par le lemme, on aura le résultat. On pose

$$F = \{1, T, T^2, ...\} \text{ et donc } \mathbb{C}\left[T, \frac{1}{T}\right] = \left\{\frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(T), P \in \mathbb{C}[T] \text{ et } Q \in F\right\}.$$

y} On sait que $\mathbb{C}[T]$ est euclidien de stathme le degré.
Soit $x \in \mathbb{C}[T]$.
On note

$$\nu(x) = \inf\{\deg(T^n x), n \in \mathbb{N} \text{ et } T^n x \in \mathbb{C}[T]\}.$$

x s'écrit $\frac{P}{T^k}$ avec $P \in \mathbb{C}[T], P(0) \neq 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\nu(x) &= \nu\left(\frac{P}{T^k}\right) \\
&= \inf_{n \geq k}(\deg(T^{n-k}P)) \\
&= \inf_{n \geq 0}(\deg(T^n P)) \\
&= \deg(P)
\end{aligned}$$

Montrons que $\mathbb{C}\left[T, \frac{1}{T}\right]$ euclidien pour le stathme ν.
Soit $x, y \in \mathbb{C}\left[T, \frac{1}{T}\right]$, $y \neq 0$.
On peut écrire x et y sous la forme

$$x = \frac{P_1}{T^{k_1}}, y = \frac{P_2}{T^{k_2}} \text{ avec } P_1(0) \neq 0 \text{ et } P_2(0) \neq 0.$$

Comme $\mathbb{C}[T]$ est euclidien, il existe $Q, R \in \mathbb{C}[T]$ tels que $P_1 = QP_2 + R$ avec $\deg(R) < \deg(P_2)$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\frac{P_1}{T^{k_1}} &= \frac{QP_2}{T^{k_1}} + \frac{R}{T^{k_1}} \\
x &= \frac{QP_2}{T^{k_1}}\frac{T^{k_2}}{T^{k-2}} + \frac{R}{T^{k_1}} \\
x &= Q\frac{T^{k_2}}{T^{k_1}}y + \frac{R}{T^{k_1}}
\end{aligned}$$

Comme $R(0)$ n'est pas nécessairement nul. Soit $k \in \mathbb{N}$ maximal tel que $R = T^k R'$ avec $R' \in \mathbb{C}[T]$. On a donc

$$\nu\left(\frac{R}{T^{k_1}}\right) = \nu\left(\frac{R'}{T^{k_1-k}}\right) = \deg(R') \leq \deg(R) = \nu(y).$$

On a donc montré que $\mathbb{C}\left[T, \frac{1}{T}\right]$ euclidien pour le stathme ν. □

Théo. $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ *est principal.*

Démonstration. Le polynôme $XY - 1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X,Y]$.

En effet, soit $P, Q \in \mathbb{C}[X,Y]$ tels que $XY - 1 = PQ$.
Comme $XY - 1$ est unitaire, on peut supposer P et Q unitaires.
Comme $\deg_Y(XY-1) = 1$, on a deux possibilités :

- $\deg_Y(P) = 1$ et $\deg_Y(Q) = 0$
- $\deg_Y(P) = 0$ et $\deg_Y(Q) = 1$.

Quitte à intervertir P et Q, on suppose que $\deg_Y(P) = 1$ et $\deg_Y(Q) = 0$. On a donc que $Q \in \mathbb{C}[X]$ et il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $Q(X) = X + a$.
Raisonnons maintenant sur le degré en X. On a $\deg_X(XY-1) = 1$ et donc on a de nouveau deux possibilités :

- $\deg_X(P) = 1$ et $\deg_X(Q) = 0$
- $\deg_X(P) = 0$ et $\deg_X(Q) = 1$.

Si $\deg_X(P) = 1$ et $\deg_X(Q) = 0$, alors on aura bien le résultat car Q sera constant.
Si $\deg_X(P) = 0$ et $\deg_X(Q) = 1$, alors on a $P \in \mathbb{C}[Y]$ et donc il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $P = Y + b$. On a donc

$$PQ(X) = (Y+b)(X+a) = XY + aY + bX + ab = XY - 1.$$

Par identification des coefficients d'un polynôme, on aurait à la fois, $a = b = 0$ et $ab = -1$ ce qui est absurde.

On a donc que $(XY-1)$ est premier (car $\mathbb{C}[X,Y]$ est factoriel). On a donc que $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ intègre. Posons

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{C}[X,Y] & \longrightarrow & \mathbb{C}(T) \\ P(X,Y) & \longmapsto & P\left(T, \dfrac{1}{T}\right) \end{array}$$

On a clairement que $(XY-1) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(\psi)$.
Attention, dans $\mathbb{C}[X][Y]$, la division euclidienne ne marche pas car X n'est pas inversible dans $\mathbb{C}[X][Y]$, on va donc passer dans $\mathbb{C}(X)[Y]$. On fait donc la division euclidienne dans $\mathbb{C}(X)[Y]$ de P par $XY-1$, il existe alors $Q \in \mathbb{C}(X)[Y]$ et $R \in \mathbb{C}(X)[Y]$ tel que

$$P(X,Y) = (XY-1)Q(X,Y) + R(X,Y) \text{ avec } \deg_Y(R) < \deg_Y(XY-1) = 1$$

On a donc que $R \in \mathbb{C}(X)$.
On multiplie par $A(X)$ le ppcm du dénominateur de $R(X)$ et des dénominateurs des coefficients de Q, on obtient alors :

$$A(X)P(X,Y) = (XY-1)Q_0(Y) + R_0(X).$$

On applique maintenant ψ à cette égalité. On a donc $R_0(T) = 0$ ie $R_0 = AR = 0$ et donc $R = 0$
Ainsi, on a $P(X,Y) = (XY-1)Q(X,Y)$. Comme $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ et que $Q \in \mathbb{C}(X)[Y]$, on obtient donc $Q \in \mathbb{C}[X,Y]$. Ainsi, $P \in (XY-1)$ et $\mathrm{Ker}(\psi) = (XY-1)$. On a, de plus, que

$$\mathrm{Im}(\psi) = \mathbb{C}\left[T, \frac{1}{T}\right].$$

Ainsi, on a $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1) \simeq \mathbb{C}\left[T, \frac{1}{T}\right]$. On a donc le résultat par la proposition. □

Leçons possibles : 122