171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

1 Formes quadratiques réelles

Dans toute la suite, on considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

1.1 Généralités

Définition 1. On appelle forme quadratique sur E une application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par $q(x) = \varphi(x, x)$ où φ est une forme bilinéaire sur E.

Notation 2. On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques de E.

Proposition 3. *Si $q \in Q(E)$, alors il existe un unique $\varphi \in \mathcal{BS}(E)$ tel que $q(x) = \varphi(x, x)$. De plus,*

$$\forall x, y \in E \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$$

On dit que φ est la forme polaire de q.

Exemple 4. L'application $q : (x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 - 2xy - 3xz$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, de forme polaire est donnée par : $\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = 3x_1x_2 + y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{3}{2}(x_1z_2 + x_2z_1)$. Sa matrice associé dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 5. *Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ de forme polaire φ. L'application $\Phi_\varphi : E \to E^*, x \mapsto \varphi(x, \cdot)$ est linéaire et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\Phi_\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$.*

Proposition 6. *$\mathcal{GL}(E)$ agit sur $Q(E)$, l'action de $f \in \mathcal{GL}(E)$ sur $q \in Q(E)$ est donnée par*

$$\forall x \in E, \quad (f \cdot q)(x) = q(f^{-1}(x))$$

En notant P la matrice de f, A celle de q, et B la matrice de $(f \cdot q)$ alors, $B = P^T AP$

Remarque 7. Puisque pour toute matrice de passage $P \in \mathrm{GL}(E)$, on a $\det(P^T AP) = (\det P)^2 \det(A)$, le rang et le signe du discriminant sont des invariants de l'action de $\mathcal{GL}(E)$.

1.2 Orthogonalité, noyau et rang

Dans toute la suite, on considère $q \in Q(E)$, $\varphi \in \mathcal{BS}(E)$ sa forme polaire et X une partie non vide de E.

Définition 8. 1. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits φ-orthogonaux dès lors que $\varphi(x, y) = 0$.

2. On définit le φ-orthogonal $X^\perp$ de X par $X^\perp = \{y \in E, \forall x \in X \quad \varphi(x, y) = 0\}$.

Proposition 9. *1. $\{0\}^\perp = E$*

2. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

3. $X \subset (X^\perp)^\perp$

4. Si Y est une autre partie non vide de E telle que $X \subset Y$, alors $Y^\perp \subset X^\perp$

Définition 10. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite q-orthogonale si :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \implies \varphi(e_i, e_j) = 0$$

et de plus, si q est définie positive et que $\forall i\ \varphi(e_i, e_i) = 1$ alors la base est dite q-orthonormée

Définition 11. 1. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est φ-isotrope s'il est φ-orthogonal à lui-même, c'est-à-dire $q(x) = 0$.

2. L'ensemble des vecteurs φ-isotropes de E, est le cône isotrope de φ :

$$C_q := \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

Exemple 12. 1. $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x) = x_1^2 - x_2^2$, alors $C_\varphi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$.

2. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, alors $C_\varphi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$.

Définition 13. 1. $ker(q) = E^\perp$

2. $rg(q) = n - dim(ker(q))$

3. On dit que q est non dégénérée dès lors que $ker(q) = \{0\}$, q est dite dégénérée le cas échéant

4. On dit que q est définie dès lors que $\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad q(x) \neq 0$

5. On dit que q est positive (resp. négative) dès lors que $\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$)

Théorème 14 (Cauchy-Schwarz)**.** *Si q est positive, alors on a :*

$$\forall x, y \in E \quad |\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$$

2 Classification des formes quadratiques réelles et recherche d'extrema

2.1 Réduction des formes quadratiques

Théorème 15. *Il existe un unique couple (s, t) d'entiers naturels tels que, pour toute base q-orthogonale $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de E on ait $s = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1; n]\!] \ tq\ q(e_i) > 0\})$ et $t = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1; n]\!] \ tq\ q(e_i) < 0\})$. De plus, on a la relation $s + t = \mathrm{rg}(q)$.*

Définition 16. On appelle ce couple (s, t), la signature de q.

Théorème 17. *Si l'on définit les ensembles suivants $\mathcal{P} = \{F$ s.e.v., $q|_F$ définie positive$\}$ et $\mathcal{N} = \{F$ s.e.v.,$q\,q|_F$ définie négative$\}$, alors la signature (s, t) de q est donnée par :*

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max_{F \in \mathcal{P}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases} \qquad et \quad t = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max_{F \in \mathcal{N}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases}$$

Théorème 18 (Réduction de Gauss)**.** *Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe un entier $r \in [\![1; n]\!]$, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ linéairement indépendantes dans E^* tels que pour tout $x \in E$ on ait $q(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \ell_j^2(x)$. En particulier r est le rang de q et on retrouve la signature (s, t) avec $s = \mathrm{Card}(\{j \in [\![1; r]\!] \ tq\ \lambda_i > 0\})$ et $t = r - s$.*

Exemple 19. On considère $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$. On a $q(x) = -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$. donc q est de rang 3 et a pour signature (1,2)
On considère $q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$. On a $q(x) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)^2$.

Théorème 20 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** *Si q est de signature (s, t), on a alors la décomposition $q = \sum_{j=1}^s \ell_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$, où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes dans E^* et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est $D = \mathrm{diag}(I_s, -I_t, 0_{n-s-t})$.*

Corollaire 21. *Deux formes quadratiques $q_1, q_2 \in Q(E)$ appartiennent à la même orbite sous l'action de $\mathcal{GL}(E)$ si et seulement si elles ont la même signature.*

Théorème 22 (Lemme de Morse)**.** *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\mathrm{sign}(D^2 f(0)) = (p, n - p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.*

Théorème 23 (Théorème Spectral)**.** *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E (c'est-à-dire que pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$). Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E. Autrement dit, il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.*

Corollaire 24. *Soit q une forme quadratique sur un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, et soit A sa matrice associée dans une base orthonormée. Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale. Autrement dit, pour tout vecteur x de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans cette base :*

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice A.

Théorème 25 (Othonormalisation simultanée)**.** *Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.*
Si q_1 est définie positive, alors il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E qui est simultanément q_1-orthonormée et q_2-orthogonale.

Autrement dit, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a :

$$q_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad et \quad q_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

où les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont des scalaires fixés.

Corollaire 26 (Inégalité d'Hadamard)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons $C_1, \cdots, C_n$ ses colonnes. Alors :*

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2$$

Avec égalité si et seulment si les colonnes sont orthognoales deux à deux pour le produit scalaire usuel ou si l'une des colonnes est nulles.

2.2 Recherche d'extremas

dans toute cette partie on considère F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie U un ouvert non vide de E, $f : U \to F$

Définition 27. on suppose que f est deux fois différentiable en un point a de U. on appelle la matrice hessienne de f en a la matrice symétrique définie par $H_f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n}$

Proposition 28. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et que $df_a = 0$, alors :*

- *Si f admet un minimum (resp. un maximum) local en a, alors $H_f(a)$ est positive (resp. négative)*
- *Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. maximum) local en a*
- *Si la signature (s,t) de $H_f(a)$ vérifie $s \geq 1$ et $t \geq 1$ alors f admet un point selle en a.*
- *Si elle n'a pas de point selle et son déterminant est nul alors on ne peut pas conclure à l'ordre 2*

Plutôt que de calculer les valeurs propres de $H_f(a)$ on utilise le critère suivant

Proposition 29 (Critère de Sylvester)**.** *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\Delta_k = \det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}\right)$ le k-ième mineur principal dominant de A. Alors :*

1. *A est définie positive si, et seulement si :*

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \Delta_k > 0.$$

2. *A est définie négative si, et seulement si :*

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad (-1)^k \Delta_k > 0.$$

Corollaire 30. *on appelle Δ_k les mineurs de la matrice hessienne de f*

- *Si $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Delta_k > 0$, alors f admet un minimum local strict en a.*
- *Si $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $(-1)^k \Delta_k > 0$, alors f admet un maximum local strict en a.*
- *Si tous les Δ_k sont non nuls sans vérifier l'une des deux conditions précédentes, alors a est un point selle (ni minimum, ni maximum local).*

Exemple 31. Soit $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz$, alors f admet un minimum local strict en $(0,0,0)$.

3 Coniques

Dans toute cette section, on considère $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

3.1 Définitions en coordonnées affines

Définition 32. Une *conique affine* est l'ensemble des zéros d'un polynôme non nul de degré 2 à deux variables :

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in K^2 \mid f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0\right\}$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0)$.

Remarque 33. Le polynôme f ci-dessus peut également s'écrire sous la forme :

$$f(M) = q\left(\vec{OM}\right) + L_O\left(\vec{OM}\right) + c_O$$

où O est l'origine du repère, et où q, L_O et c_O sont respectivement une forme quadratique sur E, une forme linéaire sur E et un scalaire, et correspondent respectivement aux termes d'ordre 2, 1 et 0 de l'équation.

Remarque 34. q est nécessairement non nulle, et ne dépend pas du point O contrairement à L_O.

Définition 35 (Conique propre)**.** Soit $\mathcal{C}$ la conique affine définie par le polynôme du second degré :

$$f(M) = q(\vec{OM}) + L_O(\vec{OM}) + c_O$$

On associe à f la forme quadratique homogénéisée $\widehat{Q}$ définie sur $E \times K$ par :

$$\widehat{Q}(u,z) = q(u) + L_O(u)z + c_O z^2$$

On dit que la conique $\mathcal{C}$ (ou le polynôme f) est **propre** si la forme quadratique homogénéisée $\widehat{Q}$ est **non dégénérée**.

Proposition 36. *La conique $\mathcal{C}$ est propre si et seulement si le polynôme f est irréductible dans $\mathbb{C}[X,Y]$,*
.

Exemple 37.

- Pour $f(x,y) = xy$, la forme quadratique homogénéisée est $Q = xy$ (dégénérée).
- Pour $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, la forme quadratique homogénéisée est $Q = x^2 + y^2 - z^2$ (non dégénérée).

Définition 38. On dit qu'un point Ω tel que $L_\Omega = 0$ est un centre pour la conique, lorsqu'il est unique, on dit que la conique est une conique à centre.

Théorème 39. *Pour que $\mathcal{C}$ soit une conique à centre, il faut et il suffit que la forme quadratique q soit non dégénérée.*

Théorème 40. *Pour toute conique propre d'image non vide qui n'est pas un cercle, il existe un point F appelé foyer, une droite $\mathcal{D}$ ne contenant pas F appelée directrice et un nombre réel positif e appelé excentricité tels que la conique soit l'ensemble des points M tels que $FM = e \cdot d(M, \mathcal{D})$.*

Inversement, étant donnés F, $\mathcal{D}$ et e, l'ensemble des points M du plan tels que $FM = e \cdot d(M, \mathcal{D})$ est une conique propre : une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, et une hyperbole si $e > 1$.

3.2 Classifications euclidienne et affine

Proposition 41 (Action du groupe affine)**.** *Soit $\mathcal{GA}(E)$ le groupe affine de l'espace E. Ce groupe agit à gauche sur l'espace des polynômes du second degré $\mathbb{P}(\mathbb{R}_2[X,Y])$ (et donc sur les coniques) par changement de repère affine :*

$$\forall g \in \mathcal{GA}(E), \quad (g \cdot P)(M) = P(g^{-1}(M))$$

*La **classification affine** des coniques consiste à déterminer les **orbites** de cette action. Deux coniques sont affinement équivalentes si et seulement si elles appartiennent à la même orbite sous l'action de $\mathcal{GA}(E)$.*

Remarque 42. L'action est bien définie sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}_2[X,Y])$ étant donné que si $\lambda > 0$ et $P \in \mathbb{R}_2[X,Y]$, alors $P(X,Y) = 0$ et $\lambda P(X,Y) = 0$ définissent la même conique.

Théorème 43 (Classification euclidienne)**.** *On considère l'action induite sur $\mathcal{I}som(E)$ par l'action de $\mathcal{GA}(E)$ définie précédemment. Les orbites de cette action se répartissent en :*

1. ***Coniques à centre*** *($\det(q) \neq 0$) : l'orbite est représentée par l'équation*
$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + c = 0 \quad (\text{avec } \lambda\mu \neq 0)$$
2. ***Paraboles*** *($\det(q) = 0$ et $L_O \notin Im(\Phi_\varphi)$) : l'orbite est représentée par l'équation*
$$\lambda X^2 + 2pY = 0 \quad (\text{avec } \lambda \neq 0, p \neq 0)$$
3. ***Paires de droites*** *($\det(q) = 0$ et $L_O \in Im(\Phi_\varphi)$) : l'orbite est représentée par l'équation*
$$\lambda X^2 + c = 0 \quad (\text{avec } \lambda \neq 0)$$

Remarque 44. La nature et le caractère propre d'une conique d'équation $q(\vec{OM}) + L_O(\vec{OM}) + c_O = 0$ se lisent directement sur ses invariants :

- $\det(q) > 0$ (ellipse), $\det(q) < 0$ (hyperbole), $\det(q) = 0$ (parabole).
- $\mathcal{C}$ est propre si et seulement si sa forme homogénéisée $\hat{Q}$ est non dégénérée ($\mathrm{rg}(\hat{Q}) = 3$).

Exemple 45. La conique d'équation $5X^2 + 6XY + 5Y^2 - 4X - 4Y - 4 = 0$ se réduit en $\frac{X'^2}{\frac{5}{8}} + \frac{Y'^2}{\frac{5}{2}} = 1$ et caractérise donc une ellipse réelle.

Théorème 46 (Classification affine)**.** *On considère l'action de $GA(E)$ définie précédemment. Les orbites de cette action se répartissent en :*

1. ***Coniques à centre*** *($\det(q) \neq 0$) : l'orbite est représentée par l'équation*
$$\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + c = 0 \quad (\text{avec } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\} \text{ et } c \in \{0, 1\})$$
   - *Ellipses réelles ($X^2 + Y^2 - 1 = 0$), ellipses imaginaires ($X^2 + Y^2 + 1 = 0$), ou point ($X^2 + Y^2 = 0$).*
   - *Hyperboles ($X^2 - Y^2 - 1 = 0$) ou droites sécantes ($X^2 - Y^2 = 0$).*
2. ***Paraboles*** *($\det(q) = 0$ et $L_O \notin Im(\Phi_\varphi)$) : l'orbite est représentée par l'équation*
$$X^2 - 2Y = 0$$
3. ***Paires de droites parallèles*** *($\det(q) = 0$ et $L_O \in Im(\Phi_\varphi)$) : l'orbite est représentée par l'équation*
$$X^2 + c = 0 \quad (\text{avec } c \in \{-1, 0, 1\})$$
   - *Droites parallèles distinctes ($X^2 - 1 = 0$), droites confondues ($X^2 = 0$), ou droites imaginaires ($X^2 + 1 = 0$).*

3.3 Définition en coordonnées barycentriques

Définition 47 (Coordonnées barycentriques)**.** Soient $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $n+1$ points d'un espace affine E de dimension n formant un repère affine (un simplexe de référence).

On appelle **coordonnées barycentriques** d'un point M de l'espace par rapport à ce système tout $(n+1)$-uplet de scalaires $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de somme non nulle tel que M est le barycentre des points pondérés (A_i, x_i), c'est-à-dire :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \quad \text{ou, pour toute origine } O, \quad \vec{OM} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{n} x_i}$$

Remarque 48. Ces coordonnées ne sont définies qu'à un facteur scalaire non nul près : ce sont des **coordonnées homogènes**. Si on impose la condition de normalisation $\sum x_i = 1$, elles deviennent uniques. Par exemple, dans le plan ($n = 2$) avec un triangle de référence (A, B, C) :

- Les sommets ont pour coordonnées $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.
- Le centre de gravité du triangle a pour coordonnées $(1,1,1)$ (ou $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ après normalisation).

Lemme 49. *Soit (A, B, C) une base affine du plan. On note (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques relatives à cette base. Alors, toute conique passant par A, B et C a une équation de la forme :*

$$pYZ + qXZ + rXY = 0 \quad \text{avec } (p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

Théorème 50. *Soient A, B, C, D, E cinq points distincts du plan affine. Il existe au moins une conique passant par ces cinq points. De plus :*

1. *Elle est **unique** si et seulement si il n'existe pas quatre points alignés parmi A, B, C, D, E.*
2. *Dans ce cas, elle est **non dégénérée** si et seulement si il n'existe pas trois points alignés parmi A, B, C, D, E.*

Développements proposés

- **Développement 1 :** Lemme de Morse – *Rouvière*
- **Développement 2 :** Par 5 points passent une conique – *Eiden*

Annexe

Proposition 51 (algorithme de Gauss)**.** *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. On décompose $q(x)$ selon deux cas figurés à chaque étape : Si il y'a présence d'un terme au carré ($a_{11} \neq 0$ quite a renuméroter) alors, on regroupe les termes en x_1 sous la forme du début d'un carré parfait*

$$q(x) = a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right)^2 + q'(x_2, \ldots, x_n)$$

où q' est une forme quadratique sur $n-1$ variables. Sinon, tous les termes au carré sont nuls ($a_{ii} = 0$, $a_{12} \neq 0$), alors on regroupe les termes en x_1 et x_2, puis on utilise l'identité $4XY = (X+Y)^2 - (X-Y)^2$ sur

$$q(x) = 2a_{12}x_1x_2 + 2x_1C(x_3, \ldots, x_n) + 2x_2B(x_3, \ldots, x_n) + R(x_3, \ldots, x_n).$$
$$q(x) = 2a_{12}\left(x_1 + \frac{B(x_3, \ldots, x_n)}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{C(x_3, \ldots, x_n)}{a_{12}}\right) + q''(x_3, \ldots, x_n)$$

en posant $X = x_1 + \frac{B}{a_{12}}$ et $Y = x_2 + \frac{C}{a_{12}}$, on obtient :

$$q(x) = \frac{a_{12}}{2}(X+Y)^2 - \frac{a_{12}}{2}(X-Y)^2 + q''(x_3, \ldots, x_n)$$

où q'' est une forme quadratique sur $n-2$ variables.