

Brian/Pagis
Théorie de l'intégral
p. 143 lemme + p. 152 p. 153

Leçon 230, 234, 241

Lemme: 205

Soit E un evn.

E est de Banach $\Leftrightarrow$ toute série absolument convergente conv.

$$L^p(X, \mu, \nu)$$

Thm Riesz-Fischer

Pour un espace mesuré donné et $1 \leq p \leq +\infty$, L^p est un espace de Banach.

preuve du lemme:

$\Rightarrow$ Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Soit φ une extraction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq 2^{-n}$ (possible car de Cauchy)

$\hookrightarrow$ On prend $\varphi(0)$ tq $\forall k \geq \varphi(0)$, $\|x_k - x_{\varphi(0)}\| \leq 1$, puis par $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tq pour $k \geq \varphi(n+1)$, $\|x_k - x_{\varphi(n+1)}\| \leq 2^{-n-1}$.

Alors, par comparaison, $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ CVA, donc converge par hypothèse.

Or, $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(0)}$ (somme télescopique),

et la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge: (x_n) admet une valeur d'adhérence. Elle est de Cauchy, donc elle cv.

$\Leftarrow$ Supposons que E est de Banach. Soit $\sum x_n$ absolument convergente. Notons $S_N = \sum_{n=0}^N x_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Pour $M \leq N$, $\|S_N - S_M\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|x_n\|$. Donc (S_N) est de Cauchy.

Elle converge par hypothèse, donc $\sum x_n$ cv.

preuve du thm: On suppose donc $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

→ Cas p fini

On utilise le lemme.

Soit $\sum f_n$ une série absolument CV dans L^p .

On peut définir $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Par le thm de CV monotone,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_p &= \left(\int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int \left(\sum_{n=0}^N |f_n| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=0}^N f_n \right\|_p \\ &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \|f_n\|_p \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p \\ &< +\infty \end{aligned}$$

En particulier, pour presque tout $x \in X$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$.

Par un tel x , $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ CVA donc CV dans K (de Banach).

On peut donc définir $g(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) & \text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par le même calcul, $\|g\|_p < +\infty$, $g \in L^p$.

Vérifions que $\sum f_n$ converge vers g dans L^p .

On a $\left\| \sum_{n=0}^N f_n(x) - g(x) \right\|_p^p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ μ -pp.

De plus, $\left| \sum_{n=0}^N f_n(x) - g(x) \right|^p \leq \left(2 \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \right)^p = \left(2^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \right)^p \right)(x)$

avec $\left\| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \right)^p \right\|_1 = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \right\|_p^p < +\infty$

Avec le théorème de convergence dominée, on a

que $\sum f_n$ CV dans L^p .

→ Cas p infini

Soit (f_n) de Cauchy dans L^∞ .

Par $k \geq 1$, soit $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N_k$,

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

On pose $E_k \subset X$ de mesure nulle tel que si $x \in X \setminus E_k$,

pour $m, n \geq N_k$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$.

Donc $E = \bigcup_{k \geq 1} E_k$ est encore de mesure nulle, et pour $x \in X \setminus E$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$: on pose $g(x)$ sa limite, car $\mathbb{K}$ est complet.

Pour $x \in E$, on pose $g(x) = 0$.

Maq $g \in L^\infty$.

Pour $x \in X \setminus E$ et $k \geq 1$, on passe à la limite en m pour obtenir,

pour $n \in \mathbb{N}$, $|g(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$, et $|g(x)| \leq |f_n(x)| + \frac{1}{k} \leq \|f_n\|_\infty + \frac{1}{k}$.

Donc $|g(x)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty + 1$.

Or, (f_n) est de Cauchy dans L^∞ , donc bornée.

Donc $g \in L^\infty$.

Maq $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^\infty} g$.

Comme $|g(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$, $\|g - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, où $n \geq N_k$.

Il y a donc convergence uniforme.