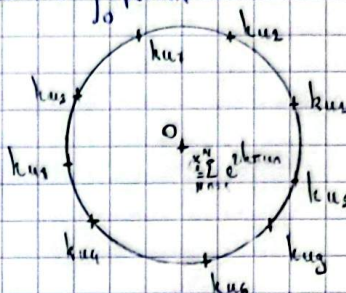


1) $u \in \mathbb{R}^N$, ABSE:(i) u équirépartie modulo 1 ($\Leftrightarrow \forall 0 \leq a < b \leq 1: X_N(u, [a, b]) = \frac{| \{u_1, \dots, u_N\} \cap [a, b] |}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b-a$)(ii) $\forall f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 1-périodique: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(un) = \int_0^1 f(t) dt$ (iii) $\forall k \neq 0$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n u} = 0$$

2) Soit $\gamma > 0$, alors: $(\gamma n)_{n \geq 1}$ est équirépartie mod. 1 $\Leftrightarrow \gamma \notin \mathbb{Q}$.3) $(\log(n))_{n \geq 1}$ n'est pas équirépartie mod. 1.4) $(\frac{1}{2} \sqrt{n})_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1.preuve: Notons $S_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(un)$ $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soient $0 \leq a < b \leq 1$ et $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement 1-périodique de $\chi_{[a,b]}$.

$$\text{On a: } S_N(\chi) = X_N(u; [a, b]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b-a = \int_0^1 \chi \quad \text{par hyp.}$$

Par linéarité de nos expressions, on a $S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 f$ $\forall f$ prolongement 1-per. d'une fonction en valeur sur $[0, 1]$.Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 1-périodique. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier tq $\|f - \tilde{g}\|_{\infty} \leq \varepsilon$.On note g le prolongement 1-périodique de $\tilde{g}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f - S_N(f) \right| &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \int_0^1 f - g \right| + |S_N(f) - S_N(g)| + \left| \int_0^1 g - S_N(g) \right|}_{\leq 2\varepsilon \quad \forall N} \\ &\leq \underbrace{\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 g - S_N(g) \right|}_{=0} + 2\varepsilon \end{aligned}$$

$$\leadsto S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 f$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Soit $k \neq 0$, par hyp.: $S_N(\cos(2k\pi \cdot)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos(2k\pi t) dt$ et $S_N(\sin(2k\pi \cdot)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin(2k\pi t) dt$

$$\text{Or } \int_0^1 \cos(2k\pi t) dt = \left[\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 = 0 \quad \text{et de m. } \int_0^1 \sin(2k\pi t) dt = 0$$

$$\text{Par linéarité: } S_N(e^{2k\pi i \cdot}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-per. Par Stone Weierstrass: $\exists T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tq $\|T - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$
 $x \mapsto \sum_{k=-d}^d c_k e^{2\pi i k x}$

On a: $\int_0^1 \left| \sum_{k=-d}^d c_k e^{2\pi i k x} \right| dx = \sum_{k=-d}^d c_k \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi i k x} dx}_{= \delta_{k,0}} = c_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \left(\sum_{k=-d}^d c_k e^{2\pi i k x} \right)$

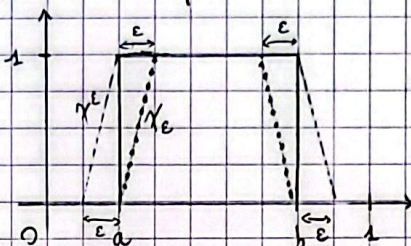
De la m. man. que (ii) $\Rightarrow$ (i): $\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N(f) - \int_0^1 f| \leq 2\varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Soit $0 \leq a < b \leq 1$. On a vu dans (i) $\Rightarrow$ (ii) que $\chi_{[a,b]}(x) = S_N(\chi)$ où χ est le prolongement 1-per. de $\chi_{[a,b]}$ et $b-a = \int_0^1 \chi_{[a,b]} = \int_0^1 \chi$. Il suff. donc de montrer $S_N(\chi) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \chi$.

- Si $a=0$ et $b=1$: $\chi=1$ et c'est de

- Si $0 < a$ et $b < 1$: On pose $\varepsilon > 0$ tq $\varepsilon < \min(a, 1-b, b-a)$ et on construit χ_ε et χ^ε de

la manière suivante:



les prolongements 1-per sont e° .

Par l'ug. $S_N(\chi_\varepsilon) \rightarrow \int_0^1 \chi_\varepsilon$ et $S_N(\chi^\varepsilon) \rightarrow \int_0^1 \chi^\varepsilon$.

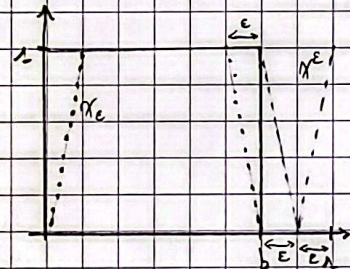
Or: $\chi_\varepsilon \leq \chi \leq \chi^\varepsilon$ et $\int_0^1 \chi_\varepsilon = \int_0^1 \chi - \varepsilon$ et $\int_0^1 \chi^\varepsilon = \int_0^1 \chi + \varepsilon$

$\Rightarrow \limsup S_N(\chi) - \varepsilon \leq \limsup S_N(\chi^\varepsilon) - \varepsilon = \int_0^1 \chi + \varepsilon - \varepsilon = \int_0^1 \chi = \int_0^1 \chi_\varepsilon + \varepsilon = \liminf S_N(\chi_\varepsilon) + \varepsilon \leq \liminf S_N(\chi) + \varepsilon$

En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$: $\limsup S_N(\chi) \leq \int_0^1 \chi \leq \liminf S_N(\chi) \Rightarrow S_N(\chi) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \chi$.

- & $a=0$ et $b < 1$: On prend $\varepsilon > 0$ tq $\varepsilon < \min(b, 1-b)$ et on fait la m. chose en

prolongant la fct suivante:



- similaire si $a > 0$ et $b=1$

2) .8: $\chi = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{2\pi i n x}$, alors $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n x} = 1$

.8 $\chi \in \mathcal{H}^2$: Soit $k \neq 0$. On a $k \chi \notin \mathcal{H}^2$ donc $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n x} \right| = \left| \frac{e^{2\pi i k x}}{N} \cdot \frac{e^{2\pi i k N} - 1}{e^{2\pi i k x} - 1} \right|$

$\leq \frac{2}{|e^{2\pi i k x} - 1| N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

3) On pose $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ $t \mapsto e^{2\pi i \log t}$. f est C^∞ et $f'(t) = \frac{2\pi i e^{2\pi i \log t}}{t}$. En particulier, $|f'|$ est décroissante.

On a: $\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - \int_n^{n+1} f(n) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| (t-n) dt = \frac{\pi}{n}$

Donc $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) - \frac{1}{N} \int_1^{N+1} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\pi}{n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Or } \left| \frac{1}{N} \int_1^{N+1} f(t) dt \right| &= \left| \frac{1}{N} \int_1^{N+1} e^{2i\pi \log(t)} dt \right| = \frac{1}{N} \left| \left[\frac{e^{(2i\pi+1)\log(t)}}{2i\pi+1} \right]_1^{N+1} \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{e^{(2i\pi+1)\log(N+1)}}{2i\pi+1} - \frac{1}{2i\pi+1} \right| \\
 &\geq \frac{1}{N} \frac{|e^{(2i\pi+1)\log(N+1)}| - 1}{|2i\pi+1|} = \frac{1}{|2i\pi+1|}
 \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{N} \int_1^{N+1} f(t) dt \not\rightarrow 0$ et donc $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi \log(n)} \not\rightarrow 0$ car $(\log(n))$ pas équi-répart mod 1.