

* $SO_2(\mathbb{F}_q)$:

degré ¹⁰⁶ 120; 128; 130

[NH₂ G₂ Form 2] VIII 3

Si $q = p^f$ avec $p \in \mathbb{P}$ impair, alors

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2 \end{cases}$$

De plus:

$$SO_2(\mathbb{F}_{2^n}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$$

Soit $t \in \mathbb{F}_q$:

$$\text{Soit } s \in \mathbb{F}_q: (-1+s; ts) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (s-1)^2 + (ts)^2 = 1 \Leftrightarrow s^2 - 2s + t^2 s^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s=0 \quad \text{ou} \quad s = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\leadsto D \cap \mathcal{C} = \left\{ \infty; \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2} \right) \right\}$$

$$f: D \longrightarrow \mathcal{C} \setminus \{\infty\} \quad \text{bien déf.}$$

$$(s, t) \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

$$\text{Soit } (a, b) \in \mathcal{C}, a \neq -1$$

$$(-1 + (a+1)s, bs) \in D \Leftrightarrow (a+1)s = 2$$

$$\Leftrightarrow s = 2(a+1)^{-1}$$

$$\leadsto 2t = bs = 2b(a+1)^{-1}$$

$$g: \mathcal{C} \setminus \{\infty\} \longrightarrow D \quad \text{inverse de } f$$

$$(a, b) \longmapsto (s, t) = (1, b(a+1)^{-1})$$

Cas de $\mathbb{F}_2$:

$$H = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{F}_2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = ab + bc = 1 \quad \text{et} \quad ac + bd = 0$$

$$\Leftrightarrow a+b=1 \quad \text{et} \quad (c, d) = (b, a)$$

$$\Leftrightarrow H = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1+a & a \end{pmatrix}$$

$$\text{On vérifie que } \mathbb{F}_2 \longrightarrow \text{SO}_2(\mathbb{F}_2) \quad \text{est un isomorphisme de groupes}$$

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1+a & a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \text{SO}_2(\mathbb{F}_2) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \quad (\text{groupe additif de } \mathbb{F}_2^n)$$