

* Endomorphismes semi-simples: de gons 141, 150, 151 (122, 148)

[Gourdon: Algèbre] IV, 5
Problème 22

E un K -ev. de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est semi-simple lorsque $\forall F \leq E$ stable par f , $\exists$ un supplémentaire stable par f .

1) f est semi-simple $\Leftrightarrow \text{pf}$ n'a pas de facteur carré.

2) 8: $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est semi-simple, alors $M \sim \begin{pmatrix} D & \\ & B \end{pmatrix}$ avec D diagonale et B diagonale par blocs avec des blocs de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

preuve:

On commence par montrer l'assertion suivante:

• Si μ_f est irréductible, alors f est semi-simple.

On suppose donc μ_f irréductible sur K .

Soit $F \leq E$ stable par f . Si $F = E$: dz. Sinon, on peut considérer $x \in E \setminus F$.

On note $E_n := \{P(f)(x), P(f)(x^2), \dots, P(f)(x^n)\}$ sur stable par f .

* d'lg $F \cap E_n = \{0\}$.

Supposons que ce ne soit pas le cas: $\exists P(f)(x) \in F \setminus \{0\}$.

En particulier, $P(f)(x) \neq 0$ donc $\mu_f \neq 1$. Or, μ_f est irréductible sur K donc $\deg \mu_f = 1$.

$K[X]$ est principal donc on a une relation de Bézout: $uP + v\mu_f = 1$.

Ainsi: $x = u(f)(P(f)(x)) + v(f)(\mu_f(f)(x)) = u(f)(P(f)(x)) \in F$ $\frac{1}{2}$.

On a donc bien $F \cap E_n = \{0\}$.

Si $F \oplus E_n = E$, c'est bon. Sinon on répète l'opération en remplaçant F par $F \oplus E_n$.

On est en dim finie et à chaque fois E_n est de dimension non nulle donc

on finit par obtenir: $x, \dots, x_k \in E$ tq $E = F \oplus E_n \oplus \dots \oplus E_{k-1}$

$\rightsquigarrow E_n \oplus \dots \oplus E_{k-1}$ connexe.

1) $\odot$ On suppose $\mu_f = \mu_1 \dots \mu_r$ avec les μ_i des irréductibles 2 à 2 distincts.

Soit $F \leq E$ stable par f .

Par le lemme du noyau: $F = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(f|_F)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(f)) \cap F$

Soit $i \in \{1, \dots, r\}$: $\mu_i \nmid \ker(P_i(f)) = P_i(f)$ donc, par ce qu'on a fait avant, $\exists G_i \leq \ker(P_i(f))$ stable

par f tq $\ker(P_i(f)) = F \cap \ker(P_i(f)) \oplus G_i$ (car $F \cap \ker(P_i(f))$ est stable par f).

Ainsi: $E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(f))$

$= \bigoplus_{i=1}^r (\ker(P_i(f)) \cap F) \oplus G_i$

$= \underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(f)) \cap F \right)}_{= F} \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^r G_i \right)}_{= G}$

G est bien un supp stable de F .

Dev. Alg. 12.

⊕ Supposons f semi-simple. Supposons par f absurde qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ irréd. tq $\mu_f = P^2 Q$.
 Soit $F := \ker(P(f))$, stable par f . On peut donc considérer un supplémentaire f -stable G .

$$E = F \oplus G. \text{ Notons } R := \mu_f|_G.$$

• d'lg $\mu_f|_P R$:

$$\text{Soit } a \in E: a = \underbrace{a_F}_{\in F} + \underbrace{a_G}_{\in G}. \text{ Donc: } (PR)(f)(a) = R(f) \circ P(f)(a_F) + P(f) \circ R(f)(a_G) = 0.$$

$$\leadsto \mu_f|_P R. \quad (*)$$

• d'lg $P \nmid R = 1$:

Si ce n'est pas le cas, comme P irréd., on a: $P \mid R$.

En particulier, $P(f)|_G$ n'est pas inversible, et donc $\ker(P(f)|_G) = \ker(P(f)) \cap G \neq \{0\}$.

$$\text{Ainsi: } P \nmid R = 1.$$

$$\text{Or, } R = \mu_f|_G \mid \mu_f = P^2 Q, \text{ donc (lemme de Gauss/Euclide): } R \mid Q.$$

$$\text{Ainsi, par } (*): \quad P^2 Q = \mu_f \mid P Q \quad \text{c.à.d.}$$

On dispose également d'une preuve alternative du premier point [Kombadi, Algèbre et géométrie] 11.7
 (μ_f irréd. $\Rightarrow f$ semi-simple), qui rentre mieux dans Pa 14.1.

On note $L := \mathbb{K}[X]/(\mu_f)$ extension de $\mathbb{K}$.

On peut munir E d'une structure de L -ev. par: $\bar{P}.x = P(f)(x)$.

Si F est un sous $\mathbb{K}$ -ev, on a:

$$F \text{ stable par } u \Leftrightarrow F \text{ est un sous } L\text{-ev.}$$

En effet: F stable par $u \Leftrightarrow \forall x \in F: u(x) \in F$

$$\Leftrightarrow \forall x \in F, \forall P \in \mathbb{K}[X]: P(u)(x) \in F$$

$$\Leftrightarrow F \text{ est un sous } L\text{-ev.}$$

Or, tout sous L -ev admet un (L) -supplémentaire, ce qui permet de conclure.

• on peut faire + simple