

* Nombres de Stirling: d'après 105, 180, 261, 262, 264

[Gardner, Algèbre-Probab] VI.4.7

On pose $X^n := X(X-1)\dots(X-n+1)$ et $X^{\bar{n}} := X(X+1)\dots(X+n-1)$

et [Garet-Kurtzmann] XIV.6.1.292

On définit $s(n,k)$ les nombres de Stirling de 1^{ère} espèce, $|s(n,k)|$ les nombres de Stirling de 1^{ère} espèce non signes et $S(n,k)$ les nombres de Stirling de 2^{de} espèce par:

$$X^n = \sum_{k=0}^n s(n,k) X^k \quad \text{et} \quad X^n = \sum_{k=0}^n S(n,k) X^{\bar{k}}$$

On a également: $X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n,k)| X^k$

d'orbites

1) Soit Σ_n une variable aléatoire uniforme sur Σ_n et C_n le nombre de cycles à supports disjoints dans la décomposition de Σ_n .

Alors:

$$P(C_n=k) = \frac{|s(n,k)|}{n!}$$

pour les leçons de Probab + 105 + 218

En particulier:

$$E[C_n] = H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

et

$$\frac{C_n - P(n)}{\sqrt{P(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0,1)$$

* $S(n,k)$ est le nombre de façons de partitionner $[1,n]$ en k sous-ensembles.

En particulier: $\sum_{k=0}^n S(n,k) = B_n$ où B_n est le n-ième nombre de Bell comptant le nombre de façons de partitionner $[1,n]$.

preuve:

1) * d'où $|s(n+1,k)| = |s(n,k-1)| + n|s(n,k)| \quad \forall k \in [1,n], \quad |s(n,n)| = 1 \quad \text{et} \quad |s(n,0)| = 0.$

$|s(n,n)| = 1$ car $X^{\bar{n}} = X^{\bar{n}} \dots$ et $|s(n,0)| = 0$ car $X \nmid X^{\bar{n}}$ pour $n \geq 1$.

On a $X^{\overline{n+1}} = (X+n)X^{\overline{n}}$

orbite à la place de cycle à chaque fois.

$$= (X+n) \sum_{k=0}^{\overline{n}} |s(n,k)| X^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\overline{n+1}} |s(n,k-1)| X^k + \sum_{k=0}^{\overline{n}} n |s(n,k)| X^k$$

ce qui donne bien le rés. en identifiant les coeff devant X^k , $k=1, \dots, n$.

Notons maintenant S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant k cycles à app. disjointes dans leur décomposition et $C(n,k) := |S_{n,k}|$

* Alg $C(n,k)$ vérifie les mêmes relations que $|s(n,k)|$.

• $C(n,0) = 0$:

car il y a au moins un cycle dans la décomposition.

• $C(n,n) = 1$:

car seule l'identité a n cycles dans sa décomposition.

• $C(n+1,k) = C(n,k-1) + n C(n,k)$ par $1 \leq k \leq n$.

On a $S_{n+1,k} = \bigcup_{m=1}^{n+1} S_{n+1,k}(m)$ où $S_{n+1,k}(m) = \{\sigma \in S_{n+1,k} \mid \sigma(n+1) = m\}$.

- $m = n+1$:

Soit $\sigma \in S_{n+1,k}(n+1)$:

On a $\sigma(n+1) = n+1$ donc $(n+1)$ représente un cycle dans la décomposition de σ .

Ainsi: $\sigma|_{\{1, \dots, n\}} \in S_{n,k-1}$

Réciproquement, si $\sigma \in S_{n,k-1}$, alors le prolongement $\tilde{\sigma} \in S_{n+1,k}$ de σ donné par $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$ vérifie $\tilde{\sigma} \in S_{n+1,k}(n+1)$.

Donc: $S_{n+1,k}(n+1) \cong S_{n,k-1}$

- $1 \leq m \leq n$:

Soit $\sigma \in S_{n+1,k}(m)$:

la décomposition de σ en cycles à support disjoint est:

$$\sigma = c_1 c_2 \dots c_{p-1} c_p (n+1 \ m \ n_3 \ n_4 \dots n_q)$$

Notons $\tau := (n+1 \ m)$

On a: $\tau \circ \sigma = c_1 c_2 \dots c_{p-1} c_p (m \ n_3 \ n_4 \dots n_q)$

Ainsi: $f(b) := \cos(b) \in \mathbb{R}_{n,k}$

On vérifie de la même manière que précédemment que f est une bijection.

Ainsi: $\mathbb{R}_{n+1,k}(m) \stackrel{b}{=} \mathbb{R}_{n,k}$

$$\begin{aligned} \text{On a donc: } C(n+1, k) &= \sum_{m=1}^{n+1} |\mathbb{R}_{n+1,k}(m)| \\ &= |\mathbb{R}_{n,k-1}| + \sum_{m=1}^n |\mathbb{R}_{n,k}| \\ &= C(n, k-1) + n C(n, k) \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence sur n :

$\forall n, k: C(n, k) = |\mathbb{R}_{n,k}|$

Ainsi:

$$P(C_n = k) = \frac{|C(n, k)|}{n!} = \frac{|\mathbb{R}_{n,k}|}{n!}$$

Soit alors $g(z) = E[z^{C_n}] = \sum_{k=1}^n P(C_n = k) z^k$ la série génératrice de C_n .

On a alors:

$$g(z) = \sum_{k=1}^n \frac{|\mathbb{R}_{n,k}|}{n!} z^k = \frac{1}{n!} z^{\bar{n}} \quad \text{où } z^{\bar{n}} = z(z+1)\dots(z+n-1)$$

Ainsi:

$$E[C_n] = \sum_{k=1}^n k P(C_n = k)$$

$$= g'(1)$$

$$= \frac{g'(1)}{g(1)}$$

car $g(1) = 1$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1+1} + \dots + \frac{1}{1+n-1}$$

car $\frac{g'}{g} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n-1}$

$$= H_n$$

* d.l.g $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$.

Notons $\ell(t) = E[e^{\frac{it(C_n - \ln(n))}{\sqrt{\ln(n)}}}]$

On a: $\ell(t) = E[e^{\frac{itC_n}{\sqrt{\ln(n)}}}] e^{-\frac{it\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{\ln(n)}}}$ (On fixe $t \in \mathbb{R}$)

$$= g\left(e^{\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}}\right) e^{-\frac{it\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{\ln(n)}}}$$

$$= \frac{1}{n!} \left(e^{\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}}\right)^{\bar{n}} e^{-\frac{it\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{\ln(n)}}}$$

$$= \prod_{k=1}^n \left(\frac{e^{\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}} + k - 1}{k}\right) e^{-\frac{it\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{\ln(n)}}} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{e^{\frac{it}{\sqrt{\ln(n)}}} - 1}{k}\right) e^{-\frac{it\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{\ln(n)}}}$$

Dev. Alg 18.

Pour n assez grand, on a $\frac{e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1}{k} \in \mathcal{D}(0, \frac{1}{2}) \quad \forall k \in [1, n]$ et on peut donc prendre la détermination principale du logarithme:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1}{k}\right) - i\sqrt{t \ln n}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1}{k}\right) - i\sqrt{t \ln n}\right) \end{aligned}$$

d'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f donne

$$|f(z) - f(0) - f'(0)z| \leq \sup_{\mathcal{D}(0, \frac{1}{2})} |f''| \times \frac{|z|^2}{2} \quad \forall z \in \mathcal{D}(0, \frac{1}{2})$$

Or: $f'(z) = \frac{1}{1+z}$ et $f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}$ et $f(0)=0$ donc:

$$|f(z) - z| \leq 2|z|^2 \quad \forall z \in \mathcal{D}(0, \frac{1}{2})$$

Donc:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1}{k}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1}{k} \right| &\leq 2 \sum_{k=1}^n \left| \frac{e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1}{k} \right|^2 \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) |e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1|^2 \\ &= o(1) \end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1}{k} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) (e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1) \\ &= (t \ln n + o(1)) \left(\frac{i\sqrt{t \ln n}}{t \ln n} - \frac{t^2}{2(t \ln n)} + o\left(\frac{t}{t \ln n}\right) \right) \\ &= i\sqrt{t \ln n} - \frac{t^2}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi: $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{e^{i\sqrt{t \ln n}} - 1}{k}\right) = i\sqrt{t \ln n} - \frac{t^2}{2} + o(1)$

Et donc: $\varphi(t) = \exp\left(i\sqrt{t \ln n} - \frac{t^2}{2} - i\sqrt{t \ln n} + o(1)\right)$

$$= \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une $\mathcal{N}(0,1)$ et le théorème de Levy permet de conclure.

2)

* d'lg $g(n,0)=0$, $g(n,n)=1$ et $g(n+1,k)=g(n,k-1)+k g(n,k)$:

$$x^n = \sum_{k=0}^n g(n,k) x^k = g(n,n) x^n + O(x^{n-1}) \quad \text{donc } g(n,n)=1.$$

En évaluant $x^n = \sum_{k=0}^n g(n,k) x^k$ en 0, on trouve: $0^n = g(n,0) + \sum_{k=1}^n g(n,k) \cdot 0$ donc $g(n,0)=0$.

$$\text{On a: } \sum_{k=0}^{n+1} g(n+1,k) x^k = x^{n+1} = x x^n = x \sum_{k=0}^n g(n,k) x^k = \sum_{k=0}^n g(n,k) x x^k$$

$$\text{Or: } x x^k = (x-k) x^k, \text{ donc: } \sum_{k=0}^{n+1} g(n+1,k) x^k = \sum_{k=0}^n g(n,k) (x^{k+1} + k x^k) \\ = x^{n+1} + \sum_{k=1}^n (g(n,k-1) + k g(n,k)) x^k$$

de résultat tombe en identifiant les coefficients ($(x^0, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ comme famille à degrés échelonnés, on aurait dû le dire plus tôt).

Dans la suite, on note $\mathcal{P}_{n,k}$ l'ensemble des partitions de $[1,n]$ en k sous-parties.

* d'lg $|\mathcal{P}_{n,k}|$ vérifie les mêmes relations que $g(n,k)$:

$|\mathcal{P}_{n,0}|=0$ et $|\mathcal{P}_{n,n}|=1$ sont immédiats.

Soit $P \in \mathcal{P}_{n+1,k}$.

On note $p_1, \dots, p_h$ les éléments de P rangés de telle sorte à avoir

$\min p_1 < \dots < \min p_h$. On note également $m(P)$ l'entier m tq $n+1 \in p_m$ et

$$p'(P) := p_m(P) \setminus \{n+1\}.$$

On a alors:

$$\mathcal{P}_{n+1,k} = \mathcal{P}_{n+1,k}^* \cup \left(\bigsqcup_{m=1}^k \mathcal{P}_{n+1,k(m)} \right) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}_{n+1,k}^* = \{P \in \mathcal{P}_{n+1,k}, p'(P) = \emptyset\} \\ \mathcal{P}_{n+1,k(m)} = \{P \in \mathcal{P}_{n+1,k}, p'(P) \neq \emptyset \text{ et } m(P)=m\}$$

$$\text{On a alors les bijections suivantes: } \mathcal{P}_{n+1,k}^* \xrightarrow{P \mapsto P \setminus \{n+1\}} \mathcal{P}_{n,k-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{n+1,k(m)} \xrightarrow{P \mapsto (P \setminus \{n+1\}) \cup \{p(P)\}} \mathcal{P}_{n,k}$$

$$\text{Donc: } |\mathcal{P}_{n+1,k}| = |\mathcal{P}_{n,k-1}| + k |\mathcal{P}_{n,k}|$$

Ainsi, par récurrence, de la même manière que dans 1.

$$g(n,k) = |\mathcal{P}_{n,k}|$$