

* Nombres de Stirling, variante: déçons 105, 213, 261, 262, 264, 266 [Gard-Kurtzman]

XIV 4.1 292

On pose $X^n := X(X+1) \dots (X+n-1)$. On définit $|s(n, k)|$ les nombres de Stirling de première

espèce non signés par: $X^n = \sum_{k=0}^n |s(n, k)| X^k$.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. iid tq, $U_n \geq 1$, U_n suit la loi uniforme sur $[1, n]$.

Alors:

1) $\sigma_n := (1, U_n) \dots (n, U_n)$ suit la loi uniforme sur S_n .

2) Soit C_n le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à supports disjoints

de σ_n . Alors: $P(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!}$

Faire uniquement 2 et 3 en admettant que σ_{n+1} est obtenu à partir de σ_n en rajoutant $n+1$ à une des orbites.

3) $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$

preuve:

On identifie S_n à une partie de $\text{Bij}(N^+)$: $S_n = \{\sigma \in \text{Bij}(N^+), \forall k \geq n: \sigma(k) = k\}$

2) On procède par récurrence:

$n=1$: $(1 \text{ } 1) = \text{id}$ et $S_1 = \{\text{id}\}$.

• Supposons le résultat acquis pour un $n \geq 1$.

Soit $\sigma \in S_{n+1}$.

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = \sigma) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(S_{n+1} = \sigma \mid U_{n+1} = k) P(U_{n+1} = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(\sigma(n+1, k) = \sigma \mid U_{n+1} = k) \times \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} P(\sigma(n+1, k) = \sigma) \quad \text{car les } (U_k) \text{ sont indep.} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} P(\sigma = \sigma(n+1, k)) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \sigma(n+1, k) \in S_n \Leftrightarrow (\sigma(n+1, k))(n+1) = n+1$$

$$\Leftrightarrow \sigma(k) = n+1$$

$$\Leftrightarrow k = \sigma^{-1}(n+1)$$

$$\text{Ainsi: } P(\sigma = \sigma(n+1, k)) \begin{cases} = 0 & \text{si } k \neq \sigma^{-1}(n+1) \\ = \frac{1}{n!} & \text{si } k = \sigma^{-1}(n+1) \end{cases}$$

Donc:

$$P(S_{n+1} = \sigma) = \sum_{k=1}^{n+1} P(\sigma = \sigma(n+1, \sigma^{-1}(n+1))) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Le principe de récurrence permet de conclure.

2) Pour $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}^+ \setminus \{n\}$, on pose $Y_{n,k} = 1$ si k est le plus petit entier de son orbite dans σ_n et 0 sinon.

On remarque que: $C_n = \sum_{k=1}^n Y_{n,k}$

$\neq \text{dlq}$, à n fixé, $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,n}$ sont des v.a. indépendantes.

On va montrer par récurrence: $\forall n, \forall k \in \mathbb{N}^+ \setminus \{n\}$: $Y_{n,k} = 1_{\{U_k = k\}}$ ce qui permettra de conclure.

• $n=1$: c'est immédiat.

• Supposons le résultat acquis pour un certain $n \geq 1$.

Soit $\sigma_n = c_1 \circ \dots \circ c_l$ la décomposition en cycles à supports disjoints de σ_n (en comptant les cycles de longueur 1).

- Si $U_{n+1} = n+1$, alors $\sigma_{n+1} = c_1 \circ \dots \circ c_l \circ (n+1)$ et la décomposition en cycles à supports disjoints de σ_{n+1} .

On a donc $\forall k \in \{0, n\}$, $Y_{n+1,k} \mathbb{1}_{\{U_{n+1}=n+1\}} = Y_{n,k} \mathbb{1}_{\{U_{n+1}=n+1\}}$ et $Y_{n+1,n+1} \mathbb{1}_{\{U_{n+1}=n+1\}} = \mathbb{1}_{\{U_{n+1}=n+1\}}$

- Sinon, U_{n+1} est dans l'un des c_i , disons d

Posez $j_d := U_{n+1}$ et $d = (j_1 \dots j_d)$.

On a alors: $c|_0(n+1, U_{n+1}) = (j_1 \dots j_d, n+1)$

Ainsi: $c_{n+1} = c|_0 \circ \dots \circ c|_1 \circ (j_1 \dots j_d, n+1)$ et la décomp. en cycles à supports disjoints de c_{n+1} de plus petit élément de chaque cycle est le même que pour c_n donc:

$$\forall k \in \{0, n\}: Y_{n+1,k} \mathbb{1}_{\{U_{n+1} \neq n+1\}} = Y_{n,k} \mathbb{1}_{\{U_{n+1} \neq n+1\}} \quad \text{et} \quad Y_{n+1,n+1} \mathbb{1}_{\{U_{n+1} \neq n+1\}} = 0$$

Et donc:

$$\forall k \in \{0, n\}: Y_{n+1,k} = Y_{n,k} = \mathbb{1}_{\{U_k=k\}} \quad \text{et} \quad Y_{n+1,n+1} = \mathbb{1}_{\{U_{n+1}=n+1\}}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \mathbb{E}[t^{G_n}] = \mathbb{E}\left[t^{\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{U_k=k\}}}\right] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[t^{\mathbb{1}_{\{U_k=k\}}}\right] \quad \text{par indépendance} \\ &= \prod_{k=1}^n (P(U_k=1)t + 1 - P(U_k=1)) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{k+k-1}{k} \\ &= \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{|s(n,k)|}{n!} t^k \end{aligned}$$

On a donc bien: $\forall k \in \{0, n\}$, $P(G_n=k) = \frac{|s(n,k)|}{n!}$

3) d'après 4) la fonction caractéristique de $\frac{G_n - P(n)}{P(n)}$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \varphi_n(t) &= \mathbb{E}\left[e^{it \frac{G_n - P(n)}{P(n)}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{it \frac{G_n}{P(n)}}\right] e^{-it \frac{P(n)}{P(n)}} \\ &= G_n\left(e^{it/P(n)}\right) e^{-it/P(n)} \\ &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{e^{it/P(n)} + k - 1}{k}\right) e^{-it/P(n)} \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{e^{it/P(n)} - 1}{k}\right) - it/P(n)\right) \quad \text{valable pour } n \gg 1. \end{aligned}$$

On conclut alors exactement comme dans la 1^{ère} versé du développement.
(Dev. Alg. 13)