

* 5 points définissent une conique et l' théorème de Pascal. démons 149, 162, 171, 181, 191

distincts Faire uniquement le 1)

[Eiden] II 9.1, II 9.2 et III 1

1) Soient A, B, C, D, E 5 points ^{distincts} du plan tels que 4 quelconques de ces points ne soient jamais alignés.

Alors:

$\exists !$ C conique passant par ces 5 points.

De plus:

C est propre $\Leftrightarrow$ 5 quelconques de ces points ne sont jamais alignés.

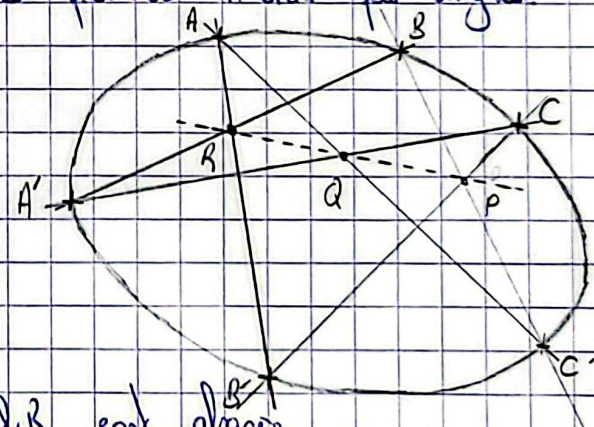
2) (Théorème de Pascal)

Soient A, B, C, A', B', C' 6 points distincts du plan, les 3 premiers n'étant pas alignés.

Notons: P l'intersection de (BC') et (CB')

Q ———— (CA') et (AC')

R ———— (AB') et (BA')



Alors:

$\exists$ une conique passant par $A, B, C, A', B', C' \Leftrightarrow P, Q, R$ sont alignés.

preuve:

1) Via la correspondance entre les coordonnées affines et barycentriques, on montre avec un

petit calcul que l'équation d'une conique en coordonnées barycentriques est de la forme:

$Q(x, y, z) = 0$ où $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique où l'on ne peut pas factoriser $(x+y+z)$ et (x, y, z) sont les coordonnées barycentriques par rapport à un vrai triangle ABC donné.

(item du plan sûrement)

(l'image de)

Notons $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + pxz + qyz + rxy$ et $\mathcal{C} = \{Q(x, y, z) = 0\}$ la conique associée.

* d'lg: $A, B, C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

On a: $A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow Q(1, 0, 0) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

De même: $B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x_2 = 0$ et $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x_3 = 0$.

On se place maintenant dans les hypothèses de 1). 3 au moins des 3 points sont non alignés (sinon ils seraient tous alignés), on peut supposer que c'est A, B, C.

Dans la suite on note (x, y, z) les coordonnées barycentriques par rapport à ABC.

* Montrons le résultat dans le cas où D ou E $\in$ (BC).

Sans perdre de généralité, ops D $\in$ (BC).

Il est alors immédiat que la conique $(AE) \cup (BC)$ convient. Montrons que c'est la seule. Soit $\mathcal{C}$ une autre conique qui convient.

* d'lg $(BC) \subseteq \mathcal{C}$:

$A, B, C \in \mathcal{C}$ donc, par ce qu'on a dit avant, on a $\mathcal{C} = \{Q(x, y, z) = 0\}$ avec

$$Q(x, y, z) = pxz + qyz + rxy.$$

De plus, D $\in \mathcal{C}$ donc: $px_D z_D + qy_D x_D + rxy_D = 0$, où (x_D, y_D, z_D) sont les coord barycentriques de D.

Or, D $\in (BC) \setminus \{B, C\}$ donc $x_D = 0$ et $y_D \neq 0$ et $z_D \neq 0$.

Ainsi: $px_D z_D = 0$ et donc $p = 0$.

Donc: $\forall y, z \neq 0: Q(0, y, z) = 0$.

Donc, on a bien $(BC) \subseteq \mathcal{C}$.

Ainsi, $\mathcal{C}$ est soit l'union de (BC) et d'une autre droite, soit la droite double (BC). Or, par hypothèse, A, E $\notin$ (BC) donc le 2^e cas est impossible et on a en fait: $\mathcal{C} = (AE) \cup (BC)$.

On traite symétriquement les cas D ou E $\in$ (CA) et D ou E $\in$ (AB).

Si $AE(DE)$, alors, par hypothèse, BDE est un vrai triangle donc on fait le même raisonnement en remplaçant ABC par BDE . On raisonne de la même manière pour les cas B ou $C \in (DE)$.

⊛ Dans la suite on suppose que 3 points quelconques sont non alignés.

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par A, B, C . $\mathcal{C} = \{D(x, y, z) = 0\}$ avec $D(x, y, z) = px^2 + qz^2 + rxy$.
Alors (x_D, y_D, z_D) et (x_E, y_E, z_E) les coordonnées barycentriques de D et E .

On a:

$$D, E \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} px_D z_D + qz_D z_D + r x_D y_D = 0 \\ px_E z_E + qz_E z_E + r x_E y_E = 0 \end{cases} \quad (S).$$

* d'où le rang du système linéaire (S) relatif par (p, q, r) vaut 2.

• (S) a 2 lignes donc $\text{rang}(S) \leq 2$

• le mineur associé aux colonnes 1 et 2 vaut: $\Delta = \begin{vmatrix} y_D z_D & z_D x_D \\ y_E z_E & z_E x_E \end{vmatrix} = y_D z_D z_E x_E - y_E z_E z_D x_D$

Supposons $\Delta = 0$:

Par hypothèse, $D \notin (AB)$ et $E \notin (AB)$ donc $z_D \neq 0$ et $z_E \neq 0$

Donc: $y_D x_E - y_E x_D = 0$

Ainsi: $\begin{vmatrix} x_D & x_E & 0 \\ y_D & y_E & 0 \\ z_D & z_E & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_D & x_E \\ y_D & y_E \end{vmatrix} = x_D y_E - x_E y_D = 0$

On en déduit que D, E et C sont alignés: absurde

Donc $\Delta \neq 0$ et (S) est bien de rang 2.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S) est une droite vectorielle, ce qui correspond bien à une unique conique (deux f.p. proportionnelles donnent la même conique).

Cette conique est propre car si c'était la réunion de deux droites (ou une droite double ou un point), le principe des témoins assumerait que 3 des 5 points seraient sur une même droite et donc alignés.