

Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Interversion des limites.

1.1 Convergence uniforme.

[Amr19], III.1 et [Hau07], XII

1.2 Régularité de la fonction limite.

[Amr19], III.2-3 et [Hau07]

1.3 Cas des fonctions holomorphes.

[QQ17], IV.7.4 et V.3.3 et [Rud20], XV

D1

Lemme. $\forall |z| \leq 1, \forall p \in \mathbb{N} : |1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ où $E_p(z) = (1 - z) \exp \left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \right)$.

Théorème. Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite injective sans point d'accumulation telle que $a_n \neq 0 \forall n$. Soit $m_n \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ et notons (z_n) la suite où chaque a_n est répété m_n fois. Soit $f : z \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} E_n \left(\frac{z}{z_n} \right)$. Alors f est bien définie, holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ses zéros sont exactement les a_n , d'ordres respectifs m_n .

[Rud20], XV.2

Remarque : si on a du temps on peut également faire la démonstration pour un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$ mais ça nécessite d'admettre certaines choses sur les fonctions holomorphes sur la sphère de Riemann. On peut également montrer comme corollaires presque immédiats de ce théorème le théorème de factorisation de Weierstrass et le fait que $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \text{Frac}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$.

2 Interversion limite/intégrale.

2.1 Théorèmes de convergence.

[BP12], VIII.1-2 et [Can09], III.5

Dbon

Théorème. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $A := \{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}$ et $B := \{\xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) \neq 0\}$. Si $\lambda(A) < +\infty$ et $\lambda(B) < +\infty$, alors $f = 0$ presque partout.

[BB24], 32

Remarque : A n'est pas bien défini mais $\lambda(A)$ oui.

2.2 Intégrales à paramètre.

[BP12], VIII.3, [Can09], I.4 et [QQ17], III.4.4

D2

Théorème. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

[Cal24], VI.2

3 Intersion des intégrales.

[BP12], XI et [Can09], IV.1

4 Autres types d'interversion.

4.1 Intersion des symboles.

[Rom23], I.4

4.2 Interversion en probabilités.

[CR16]

Dbon

Théorème. Soient $(p_n) \in]0; 1[^\mathbb{N}$ et (Y_n) une suite de variables aléatoire indépendantes telles que $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On définit la suite de variables aléatoires (U_n) par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$.

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$;
2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Si (p_n) est constante égale à $p \in]0; 1[$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i$.

[BB24], 25

Remarque : si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

Références

- [Hau07] B. HAUCHECORNE. *Les contre-exemples en mathématiques*. ELLIPSES, 2007. ISBN : 9782729834180
- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.

- [BP12] M. BRIANE et G. PAGÈS. *Analyse : Théorie de l'intégration*. VUIBERT, 2012. ISBN : 9782311007381.
- [CR16] M.L. CHABANOL et J.J. RUCH. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. ELLIPSES, 2016. ISBN : 9782340013063.
- [QQ17] H. QUEFFÉLEC et M. QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. CALVAGE&MOUNET, 2017. ISBN : 9782916352596.
- [Amr19] M. El AMRANI. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340101920.
- [Rud20] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100820542.
- [Rom23] J.E. ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. EDP SCIENCES, 2023. ISBN : 9782759823390.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.
- [Cal24] P. CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. CALVAGE&MOUNET, 2024. ISBN : 9782493230119.