

Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Développements asymptotiques de suites et de séries.

1.1 Premiers résultats.

[Gou20], IV.1 et [Amr19], I

1.2 Méthodes raffinées.

[Gou20], IV.1 et [Amr19], I

1.3 Développements asymptotiques de séries.

[Gou20], IV.2 et [Amr19], II

D1

Théorème (théorème taubérien d'Hardy-Littlewood). Soit (a_n) une suite de réels positifs. Supposons que $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ (donc de rayon de convergence égal à 1). Alors, $s_n := \sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$.

[Tit76], VII.51

2 Développements asymptotiques de fonctions.

2.1 Développements limités, formules de Taylor.

[Gou20], II.1-2 et [Ave97], IV.3

Dbon

Théorème (Lemme de Morse). Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. Supposons que 0 est un point critique non dégénéré de f et $\text{sign}(D^2 f(0)) = (p, n-p)$. Alors, $\exists \varphi$ un difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

[Rou15], V.5.66 et VI.3.144

2.2 Cas des fonctions définies par une intégrale.

[Can09], I.4-6

3 Développement asymptotiques en probabilités.

[CR16], IV

D2

Théorème. On pose $X^{\overline{n}} := X(X+1)\dots(X+n-1)$. On définit $|s(n, k)|$ les **nombre de Stirling de première espèce non signés** par : $X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n, k)| X^k$.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\forall n \geq 1$ U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

1. $\sigma_n := (1 U_1) \circ \dots \circ (n U_n)$ suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$;
2. Soit C_n le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à support disjoints de σ_n . Alors,
$$\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!} ;$$
3. $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

[GK11], XIV.4.1.292

Remarque : variante du développement sur les nombres de Stirling, qui rentre mieux dans les leçons de probas et la 218 mais pas dans la 190.

Dbon

Théorème. Soient $(p_n) \in]0; 1[^{\mathbb{N}}$ et (Y_n) une suite de variables aléatoire indépendantes telles que $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On définit la suite de variables aléatoires (U_n) par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$.

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$;
2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Si (p_n) est constante égale à $p \in]0; 1[$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i) (1-p)p^i$.

[BB24], 25

Remarque : si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

Références

- [Tit76] E.C. TITCHMARSH. *The Theory of Functions*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, USA, 1976. ISBN : 9780198533498.
- [Ave97] A. AVEZ. *Calcul différentiel*. MASSON, 1997. ISBN : 9782225790799.
- [Can09] B. CANDELPERGER. *Calcul intégral*. CASSINI, 2009. ISBN : 9782842250539.

- [GK11] O. GARET et A. KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. ELLIPSES, 2011. ISBN : 9782729870409.
- [Rou15] F. ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel*. CASSINI, 2015. ISBN : 9782842251864.
- [CR16] M.L. CHABANOL et J.J. RUCH. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. ELLIPSES, 2016. ISBN : 9782340013063.
- [Amr19] M. EL AMRANI. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340101920.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.