

# Leçon 223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

## 1 Convergence des suites numériques.

### 1.1 Notion de limite

[Amr19], I.2 et I.4

### 1.2 Cas des suites réelles.

[Amr19], I.2-3

### 1.3 Comparaison de suites.

[Amr19], I.2

### 1.4 Suites définies par récurrence.

[Amr19], I.1 et I.5

## 2 Valeurs d'adhérence.

### 2.1 Généralités.

[Amr19], I.2-3

### 2.2 Valeurs d'adhérence de suites particulières.

D1

**Théorème.** 1. Si  $(u_n)$  est une suite à valeurs dans un espace métrique compact et  $d(u_{n+1}, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\text{adh}(u)$  est connexe ;

2. Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  continue et  $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in [0; 1]$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Alors,  $(u_n)$  converge si et seulement si  $|u_{n+1} - u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  ;

3. Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  continue et  $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in [0; 1]$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(u_k)$ . Alors,  $(u_n)$  converge vers un point fixe de  $f$ .

[IP19], 18

## 3 Séries numériques.

### 3.1 Généralités.

[Amr19], II.1

### 3.2 Séries à termes positifs.

[Amr19], II.2

### 3.3 Critères de convergence.

[Amr19], II.3

D2

**Théorème.** Soient  $(p_n) \in ]0; 1[^{\mathbb{N}}$  et  $(Y_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes telles que  $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ . On définit la suite de variables aléatoires  $(U_n)$  par  $U_0 = U_1 = 1$  et  $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$ .

1. Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$ , alors  $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$  ;
2. Soit  $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$  et  $(a_n)$  la suite définie par  $a_0 = 1$  et  $a_{n+1} = f(a_n)$ . Si  $(p_n)$  est constante égale à  $p \in ]0; 1[$ , alors  $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i$ .

[BB24], 25

**Remarque :** si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

## Références

- [Amr19] M. El AMRANI. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340101920.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.