

Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

(pour des exemples d'EDL issues de la physique, c.f. [Ber17], XXII.)
 I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un singleton) et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et premiers résultats.

1.1 Définitions.

[Gou20], VI.2.1

Définition 1. Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire** (ou **système différentiel linéaire**) d'ordre p sur $\mathbb{K}^n$ toute équation de la forme :

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t) \quad (*)$$

où $A_0, \dots, A_{p-1}$ sont des fonctions continues de I dans $M_n(\mathbb{K})$, B est une fonction continue de I dans $\mathbb{K}^n$ et Y est l'inconnue qui est une fonction de I dans $\mathbb{K}^n$ de classe $\mathcal{C}^p$.

En pratique, on ne traitera que les deux cas suivants :

- $p = 1$, dans ce cas, l'équation se réécrit

$$Y' = A(t)Y + B(t) \quad (\star)$$

c'est dans ce cas que l'on se placera lorsque l'on parlera de système différentiel linéaire.

- $n = 1$, dans ce cas, l'équation se réécrit

$$y^{(p)} = a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y + b(t) \quad (\dagger)$$

où les fonctions sont à valeurs scalaires. On parle alors d'**équation différentielle linéaire (scalaire)** d'ordre p .

On parlera d'**équation homogène** lorsque B ou b seront identiquement nulles. On notera $(H*)$, $(H\star)$ et $(H\dagger)$ les équations homogènes associées aux équations précédentes.

On notera également S_* , $S_\star$ et $S_\dagger$ les ensembles des solutions des équations $(*)$, $(\star)$ et $(\dagger)$ et S_{H*} , $S_{H\star}$ et $S_{H\dagger}$ les ensembles de solutions des équations homogènes associées.

Remarque 2. On peut toujours se ramener au cas $p = 1$ en remarquant que $(*)$ peut se réécrire

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

1.2 Existence et unicité de solutions.

[Gou20], VI.2.1 et VI.4.2

Théorème 3 (Cauchy-Lipschitz linéaire). Soient $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. Alors l'équation $(\star)$ admet une unique solution maximale X vérifiant $X(t_0) = X_0$. Cette solution est définie sur I tout entier.

Corollaire 4. $S_\star$ est un sous-espace affine (vectoriel pour l'équation homogène) de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Remarque 5. La direction de $S_\star$ est $S_{H\star}$. I.e., si U est solution de $(\star)$, alors V est solution de $(\star)$ si et seulement si $V - U$ est solution de $(H\star)$.

Corollaire 6. Soient $t_0 \in I$ et $x_0, \dots, x_{p-1} \in \mathbb{K}$. Alors l'équation $(\dagger)$ admet une unique solution maximale x vérifiant $x^{(k)}(t_0) = x_k$, $k = 0, \dots, p-1$. Cette solution est définie sur I tout entier.

Remarque 7. $S_\dagger$ est un sous-espace affine de dimension p .

Exemple 8. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = t$ sont les $t \mapsto t - 1 + \lambda e^{-t}$.

Lemme 9 (Grönwall). Soient φ, ψ et y trois fonctions continues de sur un segment $[a; b]$ à valeurs positives. Supposons $\forall t \in [a; b] : y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$. Alors, $\forall t \in [a; b] : y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right) ds$.

Remarque 10. En pratique, le lemme de Grönwall a des conséquences de nature qualitative souvent très utiles. Il donne par exemple une preuve de l'unicité dans le théorème 3.

1.3 Wronskien.

[Gou20], VI.2.1 et VI.2.3

Définition 11. Soient $V_1, \dots, V_n \in S_{H\star}$. On appelle **Wronskien** de $V_1, \dots, V_n$ l'application :

$$\begin{aligned} W &= W(V_1, \dots, V_n) : I \rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t)) \end{aligned}$$

Si $v_1, \dots, v_p \in S_{H\dagger}$, le Wronskien de $v_1, \dots, v_p$ est défini par :

$$W(t) = W(v_1, \dots, v_p)(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & \dots & v_p(t) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{(p-1)}(t) & \dots & v_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix} \quad (\text{c'est le Wronskien que l'on obtient en utilisant}$$

la méthode décrite plus haut pour se ramener à une équation d'ordre 1).

Exemple 12. $\cos$ et $\sin$ sont deux solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$. Le Wronskien associé est $W(t) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Proposition 13. Soient $V_1, \dots, V_n \in S_{H\star}$. Alors, le rang de $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ ne dépend pas de $t \in I$.

Proposition 14. Des solutions $V_1, \dots, V_n$ de $(H\star)$ forment une base de $S_{H\star}$ si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(V_1, \dots, V_n)(t_0) \neq 0$. Si tel est le cas, alors $W(V_1, \dots, V_n)(t) \neq 0 \forall t \in I$.

Exemple 15. Dans l'exemple précédent, $\cos$ et $\sin$ forment une base de l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$.

Proposition 16. Le Wronskien vérifie $W'(t) = \text{tr}(A(t))W(t)$ ($W'(t) = a_{p-1}(t)W(t)$ dans le cas scalaire d'ordre p).

Exemple 17. $u(t) = e^t$ est une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ de $y'' - 2y' + y = 0$. Si v est une autre solution non proportionnelle à u , alors le Wronskien de u et v vérifie $W' = 2W$. On verra qu'il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $W(t) = \lambda e^{2t}$. On est alors amené à résoudre $uv' - u'v = \lambda e^{2t}$ qui est une nouvelle équation scalaire d'ordre 1 car u ne s'annule pas (si u s'annule, il faut résoudre l'équation sur chacun des intervalles où u est non nulle et recoller aux bords). On trouve au final $v(t) = \mu e^t + \lambda t e^t$. On vérifie ensuite que $v(t) = t e^t$ définit une solution et que (u, v) est une base des solutions.

2 Résolution de l'équation.

2.1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.

[Gou20], VI.2.1

Pour $p = 1$, $(\dagger)$ devient $y' = a_0(t)y + b(t)$. On notera $a(t) = a_0(t)$.

Théorème 18. Soit $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}$ une primitive de a . Alors, pour $p = 1$, $S_{H\dagger} = \{t \mapsto \lambda e^{\psi(t)}, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Exemple 19. Pour l'équation $y' = 2ty$, $S_{H\dagger}$ est la droite engendrée par $t \mapsto e^{t^2}$.

Proposition 20 (méthode de variation de la constante). Soit $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Alors, pour $p = 1$, $t \mapsto \lambda(t)e^{\psi(t)}$ est solution de $(\dagger)$ si et seulement si $\forall t \in I, \lambda'(t) = e^{-\psi(t)}b(t)$.

Exemple 21. Appliquer la méthode à $y' = 2ty + \cos(t)e^{t^2}$ nous amène à résoudre $\lambda'(t) = e^{-t^2} \cos(t)e^{t^2} = \cos(t)$. On vérifie ensuite que $t \mapsto \sin(t)e^{t^2}$ est solution.

D1

Théorème 22. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

[Cal24], VI.2

Théorème 23. Soit $t_0 \in I$. Alors, pour $p = 1$:

$$S_{\dagger} = \left\{ t \mapsto \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(u)du\right)b(s)ds + \lambda \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right), \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Remarque 24. En pratique, pour trouver une solution particulière, on peut par exemple la chercher sous forme de série entière.

Dbon

Théorème. 1. Soit y une solution maximale de $y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2$ et I son intervalle de définition, où a et b sont continues et c dérivable ne s'annulant pas sur I . Soient $t_0 \in I$ et $z(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t c(s)y(s)ds\right)$. Alors z est solution sur I de $z'' - \left(\frac{c'(t)}{c(t)} + b(t)\right)z' + a(t)c(t)z = 0$.

2. On considère l'équation $(R_0) : y' = 2 + ty + y^2$. Posons $z_1(t) = 1 - t^2$. Alors $\exists z_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction développable en série entière de rayon infini telle que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la solution maximale y de (R_0) avec $y(0) = y_0$ est $-\frac{z_1' - y_0 z_2'}{z_1 - y_0 z_2}$ et son intervalle de définition est la composante connexe de 0 dans $\{z_1 - y_0 z_2 \neq 0\}$.

[Ber17], IV.exo17

Remarque pour cette leçon : Dans cette leçon, mettre uniquement le point 2 en tant qu'exemple.

2.2 Méthode de variation des constantes.

[Gou20], VI.2.1 et [Dem16], VII.3.3

Proposition 25 (méthode de variation des constantes). Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $S_{H\star}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $V : t \mapsto \lambda_1(t)V_1(t) + \dots + \lambda_n(t)V_n(t)$. Alors, $V \in S_{\star}$ si et seulement si $\forall t \in I, \lambda_1'(t)V_1(t) + \dots + \lambda_n'(t)V_n(t) = B(t)$.

Remarque 26. Pour tout $t \in I$, $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et donc le système obtenu est un système de Cramer, qui admet donc une solution.

Théorème 27 (méthode de variation des constantes, cas scalaire d'ordre 2). Supposons $p = 2$ et soit (u, v) une base de $S_{H^\dagger}$. Soient $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $x : t \mapsto \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t)$. Alors, pour que $x \in S_\dagger$, il suffit que λ et μ vérifient :

$$\forall t \in I, \begin{cases} \lambda'(t)u(t) + \mu'(t)v(t) &= 0 \\ \lambda'(t)u'(t) + \mu'(t)v'(t) &= b(t) \end{cases}$$

Remarque 28. Pour l'ordre p , la condition devient
$$\begin{cases} \lambda'_1(t)u_1(t) + \dots + \lambda'_p(t)u_p(t) &= 0 \\ \vdots \\ \lambda'_1(t)u_1^{(p-2)}(t) + \dots + \lambda'_p(t)u_p^{(p-2)}(t) &= 0 \\ \lambda'_1(t)u_1^{(p-1)}(t) + \dots + \lambda'_p(t)u_p^{(p-1)}(t) &= b(t) \end{cases}.$$

Exemple 29. Pour l'équation $y'' - \frac{2}{t^2}y = 3$ sur $]0; +\infty[$, une base de $S_{H^\dagger}$ est $(t \mapsto t^2, t \mapsto \frac{1}{t})$. Alors, $t \mapsto \lambda(t)t^2 + \mu(t)/t$ est solution si on a $\begin{cases} \lambda't^2 + \mu'/t &= 0 \\ 2t\lambda' - \mu'/t^2 &= 3 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\lambda' = \frac{1}{t}$ et $\mu' = -t^2$. Ainsi, $t \mapsto \ln(t)t^2 - t^2/3$ est solution sur $]0; +\infty[$.

2.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

[Dem16], VII.2.2 et VII.3

On s'intéresse à la résolution de $(H^\star)$ lorsque $A(t) = A \in M_n(\mathbb{K})$ est indépendante de $t \in I$.

Définition 30 (exponentielle de matrice). Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On pose $\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Remarque 31. La bonne définition est assurée car la série est absolument convergente (on le voit bien en prenant une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$).

Exemple 32. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.

Proposition 33. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Théorème 34. Soient $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. Alors, si A est constante, la solution de $(H^\star)$ vérifiant $X(t_0) = X_0$ est $X : t \mapsto e^{(t-t_0)A} X_0$.

Remarque 35. On peut un peu préciser le résultat dans le cas des équations scalaires sur le corps $\mathbb{C}$ (pour avoir les solutions à valeurs réelles, on prendra les parties réelles et imaginaires des solutions complexes).

Théorème 36. Supposons que les a_k dans l'équation $(H^\dagger)$ soient des fonctions constantes. Posons $P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0$ et écrivons $P = \prod_{k=1}^s (X - \gamma_k)^{m_k}$ sous forme scindée sur $\mathbb{C}$. Alors, une base sur $\mathbb{C}$ de $S_{H^\dagger}$ est $\left(\begin{array}{cc} I & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto t^q e^{\gamma_k t} \end{array} , 1 \leq k \leq s, 1 \leq q \leq m_k - 1 \right)$.

3 Problèmes aux limites.

Dans cette section, $a < b \in \mathbb{R}$ sont des nombres réels et $I =]a; b[$, $\bar{I} = [a; b]$.

3.1 Problème de Sturm-Liouville.

[Ber17], XI.1 Soient $p \in \mathcal{C}^1(\bar{I}, \mathbb{R})$ strictement positive et $q \in \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$.

Définition 37. L'opérateur de Sturm-Liouville et l'opérateur L défini pour $y \in \mathcal{C}^2(\bar{I}, \mathbb{R})$ par $L(y) = -(py')' + qy$. On s'intéresse notamment à son action sur les fonctions vérifiant les **conditions de Cauchy homogènes** : $y(a) = y(b) = 0$. On notera dans la suite $E_c = \{y \in \mathcal{C}^2(\bar{I}, \mathbb{R}), y(a) = y(b) = 0\}$ et $F_c = \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$. L est donc en particulier un opérateur de E_c dans F_c .

Définition 38. Le **problème de Sturm-Liouville** (avec conditions de Cauchy homogènes) est le problème $\begin{cases} L(y) = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$ (noyau de $L : E_c \rightarrow F_c$).

Théorème 39. Supposons $p = 1$ et q positive. Alors, seule la fonction nulle est solution au problème de Sturm-Liouville.

Contre-exemple 40. Si $p = 1$ et $q = -\omega^2$ avec $\omega \in \pi\mathbb{Z}$ et $a = 0$, $b = 1$, alors le problème de Sturm-Liouville a une infinité de solutions qui sont les $y(t) = \mu \sin(\omega t)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on suppose $p = 1$ et q positive.

Remarque 41. Le théorème précédent nous indique que pour $f \in F_c$, le problème $\begin{cases} L(y) = f \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$ a au plus une solution. On se propose dans la suite de prouver l'existence d'une solution en imposant des conditions supplémentaires sur f .

3.2 Les espaces $\mathcal{C}^{k,\alpha}(I)$.

[QZ20], VIII.3.1 et VIII.3.3

Définition 42. Soit $\alpha \in]0; 1]$. On pose $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I) = \{f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \exists C > 0, \forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha\}$ (on dira que f vérifie la condition α -Hölder sur I). On munit $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$ de la norme

$$\|f\|_{0,\alpha} = \|f\|_\alpha = \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{C}^{k,\alpha}(I) = \{f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}), \forall j \in \llbracket 0; k \rrbracket : f^{(j)} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(I)\}$. On munit $\mathcal{C}^{k,\alpha}(I)$ de la norme $\|f\|_{k,\alpha} := \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\alpha$.

Proposition 43. Soit $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(I)$, alors f se prolonge en une unique fonction $\bar{f} \in \mathcal{C}^k(\bar{I}, \mathbb{R})$ dont les dérivées vérifient la condition α -Hölder sur $\bar{I}$.

Dans la suite on notera également f pour désigner $\bar{f}$.

Lemme 44. $\|\cdot\|_{k,\alpha}$ est équivalente à la norme $\|f\|'_{k,\alpha} := \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|}{|x - y|^\alpha}$.

Dans la suite on utilisera indistinctement ces deux normes en les notant $\|f\|_{k,\alpha}$.

Proposition 45. Muni de la norme $\|\cdot\|_{k,\alpha}$, $\mathcal{C}^{k,\alpha}(I)$ est un espace de Banach et le produit y est continu.

Définition 46. Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue. On dit que T est **compacte** lorsque pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ bornée, (Tx_n) admet une valeur d'adhérence dans F . On dira de plus que T est **fortement compacte** lorsque la valeur d'adhérence peut-être choisie dans $T(E)$.

Théorème 47. L'injection $\mathcal{C}^{k,\alpha}(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\bar{I}, \mathbb{R})$ est compacte.

Théorème 48. Soient $k \geq k' \in \mathbb{N}$ et $\alpha \geq \alpha' \in]0; 1]$. Alors :

1. $\mathcal{C}^{k,\alpha}(I) \subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}(I)$ et l'inclusion est continue ;
2. Si $k > k'$ ou $\alpha > \alpha'$, alors l'inclusion est compacte ;
3. Si $k = k'$ et $\alpha > \alpha'$, alors l'inclusion est fortement compacte.

3.3 Problème de Sturm-Liouville dans les espaces de Hölder.

[QZ20], VIII.3.4

Ici, $\alpha \in]0; 1]$ et $q \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$.

Lemme 49. $\exists C_q > 0$ tq $\forall u \in \mathcal{C}^2([0; 1]), u(0) = u(1) = 0 : \|u\|_\infty \leq C_q \|u'' - qu\|_\infty$. De plus, C_q ne dépend que de $\|q\|_\infty$ et ce de manière croissante.

Lemme 50. On se place dans les hypothèses du point 2 du théorème 47. Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists C(\varepsilon) > 0$ tq $\forall f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(I) : \|f\|_{k',\alpha'} \leq \varepsilon \|f\|_{k,\alpha} + C(\varepsilon) \|f\|_\infty$.

D2

Théorème 51. Pour $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$, le problème $\begin{cases} -u'' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(I)$.

[QZ20], VIII.3.4

Références

- [Dem16] J.P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles - 4e édition*. EDP SCIENCES, 2016. ISBN : 9782759819263.
- [Ber17] F. BERTHELIN. *Équations différentielles*. CASSINI, 2017. ISBN : 9782842252298.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.
- [QZ20] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100811809.
- [Cal24] P. CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. CALVAGE&MOUNET, 2024. ISBN : 9782493230119.