

223: Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(u_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$

I- Comportement asymptotique des suites numériques

1) Convergence et limites [ELA] 10-16 [G] 20

- def limite + ex
- unicité limite
- def cv et dv
- cv $\Rightarrow$ bornée
- somme et produit
- critère séquentielle continuité [G]

2) Valeurs d'adhérence [ELA] 15

- def ss suite extraite.
- def v.a
- suites cv admettent v.a + ex et CE
- $u_n \rightarrow l$ ssi u_n et u_{n+1} cv vers l .

II- le cas des suites réelles

On suppose $K = \mathbb{R}$

1) Théorèmes généraux. [ELA] 19 32

- $\lim u_n \leq \lim v_n$ si $u_n \leq v_n$
- Th gendarmes
- $z_n = \lambda_n + i y_n$
- m nature u_n et v_n si $u_n \leq v_n$
- croissante et décroissante.
- limite monotone
- adjacents. + Th + ex

2) Suites bornées [R] 94-95

- BW
- suite cv ssi bornée et une ! v.a

3) Limites supérieures et inférieures [R] 120-121

Soit (u_n) une suite bornée et $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$ $w_n = \inf_{p \geq n} u_p$

- $v_n \searrow$ minorée $w_n \nearrow$ majorée
- def lim sup et lim inf
- L est la seule des v.a
- (u_n) cv ssi $\liminf = \limsup$

III - Suites particulières

1) Exemple d'une suite définie par récurrence [FRA]

DEV1

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

2) Suites de Cauchy [ELA] 32

- def
- prop

3) Séries numériques [ELA] 85-88

- def
- def cv
- prop
- série harmonique

DEV2

2.2.3: Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$

I-Comportement asymptotique des suites numériques

1) Convergence et limites

Définition 1: On dit que (u_n) admet $l \in K$ pour limite si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Exemple 2: La limite de $(1 + (-1)^n)^n$ est 1

Théorème 3: Si une suite numérique admet une limite alors celle-ci est unique

Définition 4: On dit que (u_n) est convergente si elle admet une limite. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

Proposition 5: Toute suite convergente est bornée.

Contre exemple 6: $(-1)^n$ est bornée mais divergente.

Proposition 7: Si $u_n \rightarrow l \in K$ et $v_n \rightarrow l' \in K$ alors

$$\forall \lambda \in K, \lambda u_n + v_n \rightarrow \lambda l + l' \text{ et } u_n v_n \rightarrow l l'$$

Proposition 8: Si $u_n \rightarrow 0$ et (v_n) bornée alors $u_n v_n \rightarrow 0$

Théorème 9: $f: K \rightarrow K$ continue ssi pour tout (u_n)

$$\text{telle que } u_n \rightarrow l \text{ alors } f(u_n) \rightarrow f(l)$$

2) Valeurs d'adhérence

Définition 10: On appelle sous-suite extraite de (u_n) , toute suite $(u_{n_k})_k$ où $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

(φ est appelée extraitrice)

Proposition 11: Si (u_n) converge vers l , alors toute suite extraite de (u_n) converge vers l .

Définition 12: On appelle valeur d'adhérence de (u_n) tout élément de K limite d'une suite extraite de (u_n)

Proposition 13: Toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence.

Exemple 14: La suite $((-1)^n)$ admet 1 et -1 comme valeurs d'adhérence.

Contre exemple 15: La réciproque de 13 est fautive:

$(n(1-(-1)^n))_n$ n'admet que 0 comme valeur d'adhérence mais diverge.

Proposition 16: Soit $l \in K$. Alors $(u_n)_n$ converge vers l ssi les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l .

II Le cas des suites réelles

on suppose $K = \mathbb{R}$

1) Théorèmes généraux

Proposition 17: Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent et $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$

Théorème 18: (des gendarmes) Soient $(a_n)_n$ $(b_n)_n$ deux suites convergentes ayant la même limite $l \in \mathbb{R}$ et si $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang alors $\lim u_n = l$.

Proposition 19: Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. Soit $l, l' \in \mathbb{R}$. On pose $z_n = u_n + i v_n \quad \forall n$. Alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l + i l' \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \end{cases}$$

Définition 20: On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si:

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$

On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si:

$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$

Proposition 21: On suppose $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Alors: 1) si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

2) si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Définition 22: On dit que (u_n) est croissante (respectivement décroissante) si pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$). On dit que (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 23: (De la limite monotone)

• Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.

• Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

Définition 24: On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si: 1) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 25: Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

De plus on a: $u_n \leq \ell \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 26: $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ sont adjacentes $\forall n \geq 1$

2) Suites bornées

Théorème 27: (Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 28: Une suite réelle est convergente, si et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

3) Limites supérieures et inférieures

Soit (u_n) une suite bornée et $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$, $w_n = \inf_{p \geq n} u_p$.

lemme 29: La suite (v_n) est décroissante minorée et (w_n) est croissante majorée.

Définition 30: La limite supérieure de (u_n) est

$$l_1 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{p \geq n} u_p \right)$$

La limite inférieure de (u_n) est:

$$l_2 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{p \geq n} u_p \right)$$

lemme 31: l_1 et l_2 sont des valeurs d'adhérence de (u_n) . $\forall$ valeurs d'adhérence ℓ de (u_n) on a $l_2 \leq \ell \leq l_1$

Théorème 32: La suite (u_n) converge si et seulement si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$

III - Suites particulières

1) Exemple d'une suite définie par récurrence

Proposition 33: Soit (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \geq 0$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

On a alors: 1) $u_n \sim \sqrt{2n}$

2) Si $u_0 = 5$, $u_{\infty} \in [45, 45, 1]$

DEV 1

2) Suites de Cauchy

Définition 34: On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est de Cauchy si, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geq N, |u_m - u_n| \leq \epsilon$.

Proposition 35: Toute suite convergente est de Cauchy. Toute suite de Cauchy est bornée.

Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge vers celle-ci.

3) Séries numériques

Définition 36: On appelle série de terme général u_n , la suite $(S_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On note $\sum u_n$ cette série et S_n est sa somme partielle.

Définition 37: On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge. Sa limite, notée S , s'appelle la somme de la série et on la note: $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

On définit le reste d'ordre n de la série comme:

$$R_n = S - S_n.$$

Proposition 38: Si une série $\sum u_n$ converge alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Théorème 39: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors:

1) Les séries sont de même nature

2) En cas de convergence, les restes sont équivalents

3) En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes

Application 40: (Développement asymptotique de la série Harmonique.)

Prenons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}^*$ tel que

$\gamma =$ constante d'Euler

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

DEV 2

Dans de nombreuses situations,
on cherche à connaître l'évolution
d'un phénomène modélisé par
une suite.
→ comportement limite

→ def limite → unique
↳ suites bornées
↳ stable par fctns ϕ

$(-1)^n$ CV
pas

mais des
sont suites qui

VALEURS D'ADHÉRENCE

→ si CV ! V.A

Th Cauchy

223: Suites réelles et complexes.
Convergence, valeurs d'adhérence
Exemples et applications

Dans le cas complexe $z_n = x_n + i y_n$
on ex y n réelle donc il suffit d'étudier
les suites réelles

Par récurrence
 $u_{n+1} = f(u_n)$

DEV

Cas particulier

Séries numériques
qu'on peut voir comme
des suites

Série Harmonique $H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ DIVER

→ utile pour savoir si
une suite CV sans connaître
sa limite

→ suite de Cauchy

→ utile des les
espaces complets

→ comparaison

→ $\downarrow$ minoree $\Rightarrow$ CV
 $\uparrow$ majoree

→ adjacentes ...

suites bornées

BW Assavoir!

bornée + ! V.A

$\limsup$ et $\liminf = V.A$

sur CV si $\overline{\lim} = \underline{\lim}$