

[ELAC] [RA]
[G] [HAS]
[OA]

219: Extremums: Existence caractérisation, recherche Exemples et applications

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -evn MSE ouvert non vide et
 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

I- Existence et unicité d'extremums

1) Définitions et premières prop [ELAC] 331 [RA] 210

- def min local, max local et global et strict
- extremum local $\Rightarrow f'(a) = 0$
- CE de la réciproque n^3

2) Compacité et coercivité [G] 31 34 [OA] 31

- Th bornes atteintes
- CE sans compacité
- App pt fixe
- def coercive
- Prop fct coercive

II- Dans un Espace de Hilbert [HAS] 482

490-493

[OA] 5

DEV 1

- identité parallélogramme
- Th de projection
- P_C est 1 Lipschitz
- Théorème avec P_C
- F dense ssi $F^\perp = \{0\}$
- Représentation de Riesz
- adjoint
- App au gradient

III - Utilisation du calcul différentiel

1) Condition du 1^{er} ordre

[ELAC] 331

[RA] 251-261

- def pt critique
- extremum local $\Rightarrow df(a) = 0$ + CE
- Rolle
- TAP
- $f \nearrow$ si $f' \geq 0$

2) Condition du 2nd ordre [ELAC] 333-334

[DA] 18

- x_0 max local $\Rightarrow d^2f(x_0)$ negative
- Δ réciproque fautive mais
- Th si $df(x_0) = 0$ et $d^2f(x_0)$ def / neg $\Rightarrow$ min / pos $\Rightarrow$ max local
- exemple

3) Extremas liés

- Th [G] 337

• App matrice symétriques

• Minimum norme matricielle 341

DEV2

219: Extremums: Existence, caractérisation, recherche exemples et applications

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ e.v.n, μ un ouvert non vide de E et $f: \mu \rightarrow \mathbb{R}$

I- Existence et unicité d'extremums

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1: Soit $A \subset E$. On dit que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum local en $a \in A$ s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \cap A, f(x) \leq f(a)$.

Si cette inégalité est vraie $\forall x \in A$, on dit que f admet un max global en a .

On définit de manière analogue la notion de minimum local et global.

Si les inégalités sont strictes pour $x \neq a$ on parle de maximum (ou de minimum) local.

Remarque 2: Le mot extremum désigne un maximum ou un minimum.

Proposition 3: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. Si f admet un extremum local en a , on a $f'(a) = 0$.

Contre-exemple 4: La réciproque est fautive: $x \mapsto x^3$ en 0.

2) Compacité et coercivité

Théorème 5 (bornes atteintes) On suppose que E est compact et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint

ses bornes. Il existe $c, d \in E$ tels que

$$f(c) = \inf_{x \in E} f(x) \text{ et } f(d) = \sup_{x \in E} f(x)$$

Contre-exemple 6: $x \mapsto \arctan x$ sur $\mathbb{R}$ est bornée mais n'atteint pas ses bornes.

Application 7: Soit (E, d) compact et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y \in E, x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe.

Définition 8: On dit que f est coercive si $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$

Proposition 9: On suppose E de dimension finie et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si C est un fermé de E et f est coercive, alors f est minorée sur C et atteint son minimum.

Proposition 10: Soit F un SEV de E de dimension finie. $\forall x \in F, \exists x^* \in F$ tel que $\|x - x^*\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F)$

II- Dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$ associée.

Lemme 11: (Identité du parallélogramme) $\forall x, y \in H, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Théorème 12: (Projection sur un convexe fermé) Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors $\forall x \in H, \exists ! y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$

y s'appelle la projection de x sur C , noté $P_C(x)$.
 De plus $P_C(x)$ est caractérisé par

$$\forall z \in C \quad \operatorname{Re}(\langle z - p_C(u), z - p_C(v) \rangle) \leq 0$$

Proposition 13: Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide.
L'application $P_C: x \in H \mapsto P_C(x)$ est 1-lipschitzienne.

Théorème 14: Soit F un fermé de H . Alors

$x \mapsto p_F(x)$ est linéaire continue $\forall x \in F \quad p_F(x) = x$
et $\|p_F\| = 1$ si $F \neq \{0\}$.

$H = F \oplus F^\perp$. En particulier $\forall u \in E, \exists ! y \in F$ et $z \in F^\perp$ tel que $u = y + z$

Corollaire 15: Soit F sen de H . Alors

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^2 = \gamma_0 \gamma$$

Théorème 16: (Représentation de Riesz)

$$\langle \psi(x) \rangle = \int \psi(x) \delta(x) dx = \psi(0)$$

Proposition 17: $\forall T \in \mathcal{L}_c(H) \exists ! T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que

$$\forall x \in H \forall y \in H \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

T^* est appelé adjoint de T .

De plus on a $\|T^*\| = \|T\|$.

Application 18: Soit $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ application différentiable en $a \in H$. On en déduit l'existence du gradient $\nabla g(a)$ qui est tel que $\nabla g(a)(h) = \langle \nabla g(a), h \rangle \quad \forall h \in H$

III - Utilisation du calcul différentiel

On se place sur $E = \mathbb{R}^n$ et χ est ouvert non vide de E .

1) Condition du premier ordre

Définition 19 : Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in M$. On dit que f admet un point critique en a si $Df(a) = 0$.

Proposition 20: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.

Si g admet un extremum local en a , alors

$$Dg(\alpha) = 0$$

Contre-exemple 21: Il faut que M soit ouvert:

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$ admet un maximum en 1 mais $f'(1) = 2 \neq 0$

• Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $g(x) = |x|$ alors Oest un min de g mais ce n'est pas un critique

domma 22: (rolle)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $g(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 23 (Accroissements finis)

Soit $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

Corollaire 24: Si $g: I \rightarrow R$ continue sur I et dérivable sur I , elle est croissante sur I ssi $g'(x) \geq 0 \forall x \in I$.

2) Condition du 2nd ordre.

[EAC] 333 Proposition 25: Si f admet un minimum (resp maximum) local en $a \in U$ et si f est 2 fois différentiable en a , alors $Df(a) = 0$ et $\forall h \in D^2g(a)(R, R) \geq 0$ (resp $D^2g(a)(R, R) \leq 0$)

Remarque 26: $D^2g(a)(R, R)$ est appelé la Hessienne de f en a .

334 Théorème 27: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable. On suppose que $a \in U$ est un point critique de f . Si $D^2g(a)$ est définie positive (resp négative) alors a est un minimum local strict (resp maximum local strict) de f .

[CA] 18 Contre-exemple 28: $f(x, y) = x^2 - y^3$

Alors $D^2f(0, 0)$ est positive mais $(0, 0)$ pas un minimum local.

3) Extremes liés

[G] 337 Théorème 29: (Extremes liés) Soient $f, g_1, \dots, g_m$ ($m \geq 1$) des fonctions C^1 sur U .

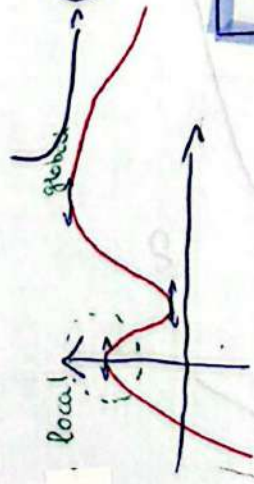
Soit $\Gamma = \{h \in U \mid \text{tels que } g_1(h) = \dots = g_m(h) = 0\}$. On suppose que f admet un extremum local en $a \in \Gamma$ (sous la contrainte $x \in \Gamma$) et que les formes linéaires $Dg_1(a), \dots, Dg_m(a)$ sont linéairement indépendantes.

Alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ (multiplicateurs de Lagrange) tels que $Df(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Dg_i(a)$. La condition est nécessaire mais pas suffisante.

Application 30: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_2 = (\sum_{i,j} m_{ij}^2)^{1/2} = \text{Tr}(M^T M)^{1/2}$ où les m_{ij} sont les coeff de la matrice. Le groupe des matrices orthogonales directes $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ de norme minimale.

DEV 2

Optimisation = chercher max $\rightarrow$ pt unique?
 et min des g et



Extremums locaux $\Rightarrow g'(a) = 0$
 $\nexists x^3$ $\nexists g'(a) = 0$

219 Extremums: existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

Conditions d'ordre 1
 extremum local $\Rightarrow Dg(a) = 0$



Th de Rolle

$\hookrightarrow$ TAF

Condition second ordre
 Etude de la Hessienne

extremes liés

Optimisation sous contrainte

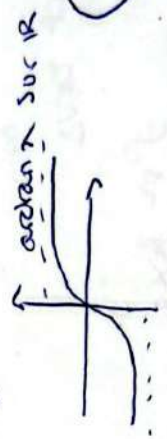
DEVZ
 ex: $S_n(\mathbb{R})$ minimise la norme $\| \cdot \|_2$ dans $S_n(\mathbb{R})$

gradient $Dg(a)R = \langle \nabla g(a), R \rangle$

Dans un EVN de dim finie
 $\rightarrow$ distance à un fermé atteinte avec la coercivité

Compact

g bornée et atteint ses bornes



Hilbert

similaire dans un Hilbert

propriété à généraliser

Projection sur un convexe fermé

DEVZ



Existence et unicité du pt minimisant la distance à C

Th de Nizet donne le lien avec l'utilisation du calcul diff