

Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Notion de compacité

1.1 Propriété de Borel-Lebesgue.

[Gou20], I.3

~ 6 items.

définition espace compact | exemples | intersection de fermés | corollaire : fermés emboîtés | partie fermée d'un compact est compacte | union finie et intersection quelconque

1.2 Précompacité et complétude.

[QZ20], V.1-2

~ 5 items.

définition précompacité | exemple | compact $\Leftrightarrow$ précompact et complet | définition relative compacité | lien avec la précompacité, exemple

1.3 Propriété de Bolzano-Weierstrass.

[Gou20], I.3.2-3

~ 5 items.

propriété Bolzano-Weierstrass | exemple : fermés bornés dans $\mathbb{R}$ | suite avec une unique valeur d'adhérence converge dans un compact | DEV 1 | Tychonov dénombrable

D1

Théorème. 1. Si (u_n) est une suite à valeurs dans un espace métrique compact et $d(u_{n+1}, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\text{adh}(u)$ est connexe ;

2. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue et $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, (u_n) converge si et seulement si $|u_{n+1} - u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;

3. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue et $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(u_k)$. Alors, (u_n) converge vers un point fixe de f .

[IP19], 18

1.4 Parties compactes dans un espace vectoriel normé.

[Li13], I.2

~ 7 items.

parties compactes dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ | équivalence des normes en dimension finie | parties compactes d'un evn de dimension finie | evn de dimension finie est complet, fermé dans un plus gros evn | application linéaires sont continues en dimension finie | théorème de Riesz | intérieur d'un compact en dimension finie | DEV bonus

Dbon

Théorème. Soit $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ définie positive et $C \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X - C) \leq 1\}$ l'ellipsoïde (pleine) associée à q centrée en C . Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide, alors :

1. à C fixé, il existe une unique ellipsoïde centrée en C contenant K de volume minimal ;
2. il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal (centre non fixé).

[BB24], II.39 et III.14

Remarque : on n'a sûrement pas le temps de présenter le point 2 mais il est important de pouvoir répondre à des questions dessus.

2 Fonctions continues et compacité.

2.1 Premiers résultats.

[Gou20], I.3.4

~ 9 items.

image d'un compact par une application continue | continue bijective partant d'un compact $\Rightarrow$ homéomorphisme | contre-exemple | théorème des bornes atteintes | théorème de Heine | contre-exemple | f continue sur un compact et $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe | contre-exemple | DEV 2 | DEV bonus

D2

Théorème (Brouwer). Toute application $\mathcal{C}^1$ de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

[GT98], II.5 et 7

Remarque : si on a le temps, expliquer comment on généralise ce théorème au cas d'une application seulement continue.

Dbon

Théorème. Soit F un sev de $\mathcal{C}([a; b])$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, ASSE :

1. $\forall f \in \mathcal{C}([a; b]), \exists ! q \in F$ tq $\|f - q\|_\infty = d(f, F)$;
2. $\forall q \in F$, si q s'annule en n points distincts, alors $q = 0$.

[GT96], II.IV.12 et [Che82], III.5

2.2 Théorème d'Ascoli et applications.

[HL09], I.2

~ 8 items.

définition équicontinuité ponctuelle, globale, uniforme | équivalence globale et uniforme car X compact | exemples | théorème Ascoli | exemples : lipschitzienne, fonction hölderienne | théorème de Montel | corollaire : pas de norme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ | remarque : semi-normes, espace de Fréchet

2.3 Applications linéaires continues : Banach-Alaoglu.

[HL09], 0.4

~ 3 items.

théorème de Banach Alaoglu | cas d'un Hilbert | application : DEV bonus

Dbon

Théorème. Soit H un espace de Hilbert et $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et coercive. Alors, J admet un minimum sur H .

[IP19], 53

3 Opérateurs compacts.

[HL09], VI.1 et [QZ20], VIII.3

~ 7 items.

définition opérateur compact | exemple : rang fini | exemple : opérateur à noyau | définition espaces de Hölder | injection $\mathcal{C}^{k,\alpha}(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\bar{I})$ compacte | inclusion $\mathcal{C}^{k,\alpha} \subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}$ compacte | DEV bonus

Dbon

Théorème. Pour $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$, le problème
$$\begin{cases} -u'' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$
 admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(I)$.

[QZ20], VIII.3.4

Références

- [Che82] E.W. CHENEY. *Introduction to Approximation Theory*. CHELSEA, 1982. ISBN : 9780828403177.
- [GT96] S. GONNORD et N. TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle*. ELLIPSES, 1996. ISBN : 9782729896942.
- [GT98] S. GONNORD et N. TOSEL. *Calcul différentiel*. ELLIPSES, 1998. ISBN : 9782729858520.
- [HL09] F. HIRSCH et G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. DUNOD, 2009. ISBN : 9782100535941.
- [Li13] D. LI. *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ELLIPSES, 2013. ISBN : 9782729883058.
- [IP19] L. ISENMANN et T. PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements - 2e édition*. ELLIPSES, 2019. ISBN : 9782340088306.
- [Gou20] X. GOURDON. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition*. ELLIPSES, 2020. ISBN : 9782340056992.

- [QZ20] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY. *Analyse pour l'agrégation*. DUNOD, 2020. ISBN : 9782100811809.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.