

Leçon 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Éléments propres et réduction.

1.1 Éléments propres, caractéristiques.

[MM22], V

~ 13 items.

définition valeur propre/vecteur propre/sous-espace propre | exemple | sous-espaces propres sont en somme directe | corollaire : au plus n vp | $P(u)(x) = P(\lambda)x$, en particulier : $P(u) = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$ | corollaire : racines du polynôme minimal | définition polynôme caractéristique | racines du polynôme caractéristique | sur $\mathbb{C}$: au moins une vp | définition multiplicité algébrique, géométrique, minimale | définition sous-espace caractéristique | somme des vp = trace, produit = déterminant | exemple en dimension 2

1.2 Réduction des endomorphismes.

[MM22], VIII.2, IX.1 et XI.1

~ 7 items.

Théorème de Cayley-Hamilton | critères de diagonalisation | exemple : n vp distinctes | critères de trigonalisation | cas de $\mathbb{C}$ | réduction de Jordan | exemples

1.3 Détermination théorique des éléments propres.

référence à déterminer

~ 4 items.

résoudre $AX = \lambda X$ | exemple | résoudre $\chi_A(\lambda) = 0$ | exemple en dimension 2

2 Exemples de matrices remarquables.

2.1 Matrices compagnons.

[MM22], VI et [CP22], I.3

~ 6 items.

définition matrice compagnon | définition endomorphisme cyclique | u cyclique $\Leftrightarrow$ matrice compagnon dans une certaine base | $\chi = \mu = P$ | remarque : donne une preuve de Cayley-Hamilton | $E_\lambda = \mathbb{K}v_\lambda$ avec formule explicite pour v_λ (Caldero)

2.2 Matrices circulantes.

[Gou21], IV.2.exo4 et [CP22], I.3.4

~ 3 items.

définition J et matrice circulante $A = P(J)$ | diagonalisation de J et de A | application, DEV 1 : suite de polygones

D1

Théorème. Soit P un n -gone du plan complexe que l'on assimilera au n -uplet $(z_i) \in \mathbb{C}^n$ des affixes de ses sommets ordonnés. Pour $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$, on notera $F_{a,b}(P)$ le n -gone (z'_i) où $z'_i = az_i + bz_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $z'_n = az_n + bz_1$.

1. Soit (P_k) la suite de n -gones définie par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = F_{a,b}(P_k)$. Alors, (P_k) converge vers l'isobarycentre G de P .
2. Le résultat tient toujours si on a $P_{k+1} = F_{a_k,b_k}(P_k)$ avec $a_k, b_k > 0$, $a_k + b_k = 1$ et $\sum_k a_k b_k = +\infty$.

[CP22], I.3.4

2.3 Matrices stochastiques.

[MM22], XV.3-4 et [App13], XXVII.30

~ 5 items.

définition matrice stochastique | exemple : les matrices de permutation | définition matrice stochastique irréductible, ergodique | DEV 2 : Perron-Frobenius | application aux chaînes de Markov

D2

Théorème. Soit P une matrice ergodique (i.e. stochastique et $\exists k \geq 1, P^k > 0$). Alors :

1. $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(P), |\lambda| \leq 1$;
2. 1 est l'unique valeur propre de module 1, elle est de multiplicité 1 ;
3. il existe une unique loi invariante π^* pour P (i.e. vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1), ses coordonnées sont strictement positives ;

$$4. P^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}.$$

[App13], XXVII.30

2.4 Matrices orthogonales ? ? ? ? ?

[MM22], X.2 et [Gri90], VII.10-11

~ 7 items.

définition matrice orthogonale | colonnes = b.o.n de $\mathbb{R}^n$ | sous-groupe de GL_n | valeurs propres sont de module 1, $\det = \pm 1$ | réduction en dimension 2 | réduction générale | cas de la dimension 3 (grifone)

3 Détermination pratique d'éléments propres.

3.1 Localisation des valeurs propres.

[MM22], XIV.1-3 et [Rom19], III.4

~ 10 items.

définition disques de Gerschgorin | théorème de Hadamard | théorème de Gerschgorin, précision sur le nombre de vp dans chaque composante connexe | exemple | définition rayon spectral | $\rho(A) \leq \|A\|$ pour une norme d'opérateur | exemple | limite de A^k selon le rayon spectral | corollaire pour les suites itératives | théorème de Gelfand

3.2 Méthodes itératives.

[Rom19], VI.1-2

~ 3 items.

définition de la suite itérative pour une matrice de vp maximale unique | méthode de la puissance itérée | méthode de la puissance inverse

Références

- [Gri90] J. GRIFONE. *Algèbre linéaire*. CÉPADUÈS, 1990. ISBN : 9782383951346.
- [App13] W. APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2013. ISBN : 9782351412985.
- [Rom19] J.E. ROMBALDI. *Analyse matricielle*. EDP SCIENCES, 2019. ISBN : 9782759823413.
- [Gou21] X. GOURDON. *Les Maths en tête - Algèbre et probabilités - 3e édition*. ELLIPSES, 2021. ISBN : 9782340059597.
- [CP22] P. CALDERO et M. PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. CALVAGE&MOUNET, 2022. ISBN : 9782493230034.
- [MM22] R. MANSUY et R. MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*. DEBOECK, 2022. ISBN : 9782807336612.