

[R]
[Gi]
[P]

Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

I - L'algèbre linéaire au service de la géométrie

1) Produit scalaire et norme [R] 713-716

- def prod scalaire, norme associée, distance
- Cauchy-Schwarz
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- vecteurs orthogonaux
- Pythagore
- distance à un sev

2) Déterminant et Volume [Gi] 130-132

- aire parallélogramme
- généralisation $\mathbb{R}^3$
- orientation

3) Produit vectoriel en dim 3 [Gi] 249-250

- def
- prop

II - Groupes orthogonaux et géométrie euclidienne

1) Le groupe orthogonal [Gi] 239 [R] 722

- def transformation orthogonale
- prop
- $f \in O(E)$ si $BON \xrightarrow{f} BON$
- def $O_n(\mathbb{R})$ $S_n(\mathbb{R})$

2) Générateurs et réduction [Ram] 730-731 ~~[P] 463~~

- Th réduction [Gi] 242
- def symétrie orthogonale
- def réflexion, retournement

- $O(E)$ engendré par les réflexions
- $SO(E)$ engendré par les retournements
- classification dim 2

3) Le groupe des quaternions [R] 163

- def / Th IH
- def G
- $G / \{ \pm 1 \} = SO_3(\mathbb{R})$

DEV1

III - Actions de groupes et isométrie des polyèdres

1) Groupe d'isométrie d'une figure [R] 81

- def Isométrie affine
- Th isométrie partie de E

2) Outils algébriques [R] 20-21 35

$G \curvearrowright E$

- def orb stab
- def action transitive
- relation orbite stab
- équation aux classes
- Formule de Burnside

3) Le cube comme exemple crucial [R] 88

- def
- isom cube

DEV2

19] Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

I- L'algèbre linéaire au service de la géométrie

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$.

1) Produit scalaire et norme.

[R] Définition 1: Le produit scalaire associé à E définit
une norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $\forall x \in E$ et une distance
713 $d(x, y) = \|x - y\|$ $\forall x, y \in E$

Théorème 2: (Cauchy-Schwarz)

$\forall x, y \in E$ $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité ssi x et y sont liés

715 Théorème 3: $\forall x, y \in E$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ avec égalité ssi $x=0$ ou $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ ($\lambda \geq 0$)

Définition 4: On dit que 2 vecteurs x et $y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$

Théorème 5: (Pythagore) Les vecteurs x et y sont orthogonaux ssi $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
+ distance ser p 716

2) Déterminant et Volume

[G] Théorème 6: L'aire $\mathcal{A}(v, w)$ du parallélogramme
130 engendré par deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^2$ est égale à
 $\mathcal{A}(v, w) = |\det(v, w)|$

Corollaire 7: Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. On note $V(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède rectangle engendré par $v_1, \dots, v_n$. On a alors $V(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$

Définition 8: On dit que les bases $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ 131 d'un ev réel de dim finie ont la même orientation si $\det(P_{e \rightarrow e'}) > 0$

Définition 10: On dit que l'on a fixé une orientation 132 de E si l'on a choisi une classe d'orientation.

(bases directes et indirectes)
3) Produit vectoriel en dim 3

Définition 11: Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel 249 de u et v noté $u \wedge v$ est défini par :

- 1) $u \wedge v$ est orthogonal au plan Vect(u, v)
- 2) $\|u \wedge v\| = \mathcal{A}(\text{P})$ P parallélogramme
- 3) $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$

Propriété 11-1) u et v sont liés ssi $u \wedge v = 0$

2) $u \wedge v = -v \wedge u$

3) Soit $\vec{n}$ vecteur unitaire normal à Vect(u, v) et α l'angle orienté (u, v) . alors $u \wedge v = \|u\| \|v\| \sin(\alpha) \vec{n}$

II- Groupes orthogonaux et géométrie euclidienne

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{O}(E)$ 239

1) Le groupe orthogonal

Définition 13: g est une transformation orthogonal si
 $\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in E$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales.

Proposition 14: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) $\exists O(E)$
- 2) $\|g(x)\| = \|x\| \forall x \in E$
- 3) si $\{e_i\}$ base de E et $A = \text{Mat}_{\{e_i\}}(g)$ alors ${}^tAA = I$

[Rou] Proposition 15: $g \in O(E)$ si elle transforme une BON en une BON.

Definition 16: $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\} \subset GL_n(\mathbb{R})$
dit groupe orthogonal

[G] Proposition/Definition 17: L'ensemble des matrices orthogonales directes: $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ est un groupe, dit groupe spécial orthogonal.

2) Générateurs et réduction

[Rou] Théorème 18: Soit $u \in O(E)$ et $\dim E = n \geq 2$. Il existe une BON B de E dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$D = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_r & \\ 0 & & R_1 \dots R_r \end{pmatrix} \text{ où } R_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \theta_k \in]0, 2\pi[\mid \mathbb{R} \} \quad p+q+2r=n$$

Definition 19: Si F est un sev de E , la symétrie orthogonale par rapport à F est l'application définie par sur E par $\forall x \in E \quad s_F(x) = p_F(x) = p_F^\perp(x)$

Definition 20: On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan et retournement une symétrie par rapport à une droite.

Théorème 21: Pour $n = \dim E \geq 2$, $O(E)$ est engendré par les réflexions et $SO(E)$ par les retournements

Proposition 22: Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$ alors:

$$\bullet \text{ si } A \in SO_2(\mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ si } A \notin SO_2(\mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

3) Le groupe des quaternions

Definition / Théorème 23: $H = \text{Vect}(1, i, j, k)$ tels que

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \text{ est un corps non commutatif.}$$

$$\forall q \in H \quad q = a + ib + jc + kd \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$Z(H) = \mathbb{R}$$

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}}$$

Definition 24: $G = S(0,1)$ dans la base $(1, i, j, k)$ est le groupe des quaternions de module 1 et d'inverse $q^{-1} = \bar{q}$

4) Lien avec les rotations de l'espace

Théorème 25: On a l'isomorphisme de groupe

$$G/\{\pm 1\} \cong SO_3(\mathbb{R})$$

DEV 1

III - Actions de groupes et isométries des polyèdres

1) Groupe d'isométrie d'une figure

Soit E un espace affine de dimension finie, E l'espace vectoriel associé muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition 26: on appelle isométrie affine toute applicⁿ $f: E \rightarrow E$ qui conserve les distances.

On note $I_0(E)$ l'ensemble des isométries affines de E .

6ⁿⁱ
242

Par
163

R
81

Pour toute partie P de E ayant au moins 2 éléments, on note $I_S(P)$ (resp $I_S^+(P)$, $I_S^-(P)$) l'ensemble des isométries (resp isométries directes, indirectes) φ de E conservant P , i.e $\varphi(P) = P$.

Théorème 27: Si P partie de E :

- 1) $I_S(P) \subset I_S(E)$ et $I_S^+(P) \subset I_S^+(E)$
- 2) $\emptyset \neq \varphi \in I_S(P) \mapsto \varphi|_P$ morphisme
- 3) Si $I_S^-(P) \neq \emptyset$, alors $\forall \sigma \in I_S^-(P)$ $\sigma \mapsto \sigma \circ \varphi$ réalise une bijection de $I_S^+(P)$ sur $I_S^-(P)$.

Dans le cas ou P fini, on a $\text{Card}(I_S(P)) = 2 \text{Card}(I_S^+(P))$

2) Outils algébriques

20 Soit $G \curvearrowright E$

Définition 28: $\forall x \in E$, $\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ est appelé orbite de x sous l'action de G

Définition 29: $\forall x \in E$ $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ est le stabilisateur de x sous l'action de G .

21 Définition 30: On dit que l'action de G est transitive si $\forall (x, y) \in E^2$ $\exists g \in G \mid g \cdot x = y$.

Théorème 31: Si G fini, $\forall x \in E$

$$|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Stab}(x)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

Théorème 32: On note $\text{Orb}(x_1), \dots, \text{Orb}(x_r)$ les orbites deux à deux distinctes, on a:

$$|E| = \sum_{i=1}^r |\text{Orb}(x_i)|$$

Proposition 33: Si G et E fini. $\forall g \in G$ on note $\text{Fix}(g) = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$ et Ω l'ensemble des orbites de E . Alors $|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$

3) Le cube comme exemple crucial

Définition 34: Soit $\mathcal{C}$ un cube. On désigne par $I_S(\mathcal{C})$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui conservent le cube.

$I_S^+(\mathcal{C})$ les isométries de déterminant 1

$I_S(S)$ isométrie conservant les sommets du cube

Théorème 35: On a:

$$1) I_S(\mathcal{C}) = I_S(S)$$

$$2) I_S(S) \cong I_S^+(S) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$3) I_S^+(S) \cong S_4$$

DEV 2

algèbre = moteur de la géométrie

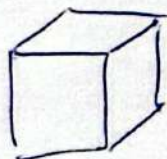
Descartes: cherche des repères

→ repérer les pts par des
matrices orthonormées
transformations comme des
matrices

191: Exemples d'utilisation de
techniques d'algèbre en géométrie

$I_3(\mathbb{P})$

Isométrie conservant
une partie de E



$I_3^+(\mathbb{R}) \simeq S_4$ (DEV 2)

Action de groupe

→ orbite
→ stabilisateur / relation

outil: Algèbre linéaire

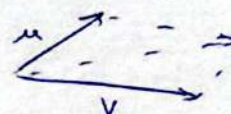
→ vocabulaire métrique fondamental

→ distance à un hyperplan?

→ volume

} $\dim \geq 4$
+ difficile

Determinant

 $\det(u, v) = V$ $\dim 2$

↳ volume d'un parallélepède à
 n vecteurs

→ orientation entre 2 bases

→ produit vectoriel

outil: Théorie des groupes

↓
groupe orthogonal

$SO_n(\mathbb{R})$

→ rotations
→ symétries

lien avec
quaternions

$SO_3(\mathbb{R}) \simeq G_{1+4}$ (DEV 1)