

[G] [Fran]
[Rom]
[Ber]

190: Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

I- Généralités sur le dénombrement [G] 299 - 302

1) Cardinal des ensembles finis

- équipotent et cardinal
- $F \subseteq E \implies |F| \leq |E|$
- principe tiroir
- Formule cible

2) Listes et arrangements

- Cardinal produit cartésien
- k liste k arrangement
- $\text{Card } P(E)$

3) Combinaisons

- p combinaison
- Formule Pascal
- Binôme Newton

II- Dénombrement en algèbre [Ber] [Rom] 21

- ordre
- Th Lagrange
- Th d'isomorphisme
- action de groupe
- équation aux classes
- Formule de Burnside
- Th de Dixon

128	148
149	171
174	178

DEV 1

III - Dénombrement en analyse

[G] 322 341-342

1) En probabilité discrète

- loi uniforme
- loi Bernoulli
- loi binomiale

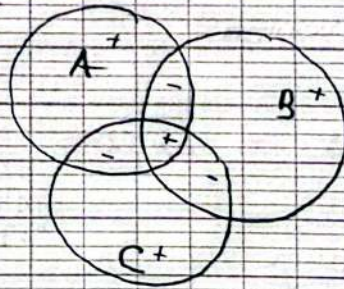
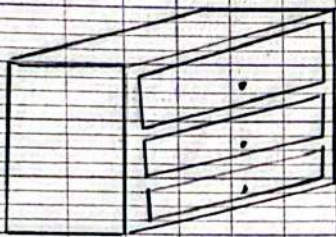
2) Utilisation des séries

[G] [Fran]

- nombre de dérangements
- série exponentielle
- nombres de Bell

DEV 2

Annexe



190: Methodes combinatoires, problèmes de dénombrement

I - Généralités sur le dénombrement

Soit E et F deux ensembles

1) Cardinal des ensembles finis

[G] 239 Définition 1: On dit qu'un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans E . Dans ce cas, l'entier n est appelé cardinal de E , noté $|E|$ ou $\#E$.

Proposition 2: 1) Si E est fini et $f: E \rightarrow F$ bijection, alors F est fini et $|E| = |F|$

2) Si F est fini et $f: E \rightarrow F$ injection alors E est fini et $|E| \leq |F|$

3) Si E est fini et $f: E \rightarrow F$ surjection, alors F est fini et $|F| \leq |E|$

Corollaire 3: Soit B un ensemble fini et $A \subset B$. Alors A est fini et $|A| \leq |B|$. Si $|A| = |B|$ alors $A = B$.

200 Corollaire 4 (principe des tiroirs) soit E et F deux ensembles finis avec $|E| > |F|$. Si φ est une application de E vers F alors il existe $y \in F$ ayant au moins deux antécédents par φ dans E .

Exemple 5: Si on doit ranger $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, au moins un des tiroirs contiendra 2 chaussettes, ou plus.

Proposition 6: Soient A et B deux ensembles finis.

$$\bullet |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\bullet |A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

Proposition 7: (Formule du crible de Poincaré)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. Alors on a

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

2) Listes et arrangements

Proposition 8: Soient n ensembles finis $E_1, \dots, E_n$. Le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$ est un ensemble fini et vérifie $|E_1 \times \dots \times E_n| = |E_1| \times \dots \times |E_n|$. Donc $|E^n| = |E|^n$

Définition 9: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p -liste de E tout élément $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p .

Exemple 10: Les listes modélisent les tirages successifs avec remise. Dans un jeu de 52 cartes, le nombre de façon de tirer 10 cartes avec remise est 52^{10}

Définition 11: Soit $|E| = n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$. On appelle p -arrangement de E toute p -liste de E d'éléments distincts.

Proposition 12: Il y a $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de E .

Exemple 13: Les arrangements modélisent les tirages successifs sans remise. Dans un jeu de 52 cartes, le nombre de façons de tirer 10 cartes sans remise est de $\binom{52}{10} = 52 \times 51 \times \dots \times 43$.

Proposition 14: Soit E fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

301

3) Combinaisons

[G] Définition 15: Soit $|E| = n$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle p -combinaison de E toute partie de E de cardinal p . Le nombre de p -combinaisons de E est noté $\binom{n}{p}$

Proposition 16: Si $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, si $p > n$ $\binom{n}{p} = 0$

Exemple 17: Les combinaisons modélisent les tirages simultanés. Dans un jeu de 52 cartes, le nombre de façon de tirer 10 cartes simultanément est $\binom{52}{10}$

Proposition 18: si $p \geq 1$ $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Proposition 19: (Formule du Binôme). Soient a et b deux éléments d'une algèbre qui commutent. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

II - Dénombrement en algèbre

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini.

[Per] Définition 20: Le nombre d'éléments de G est appelé l'ordre de G , noté $|G|$.

128 Soit $x \in G$. L'ordre de x est l'ordre du sous-groupe $\langle x \rangle$

149 Théorème 21: Soit H un sous-groupe de G . Alors on a:
• $|G| = [G:H] \cdot |H|$ (Lagrange)

148 Corollaire 22: L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe

Définition 23: Soit E un ensemble. Une action de G sur E est une application $G \times E \rightarrow E$ vérifiant:
 $(g, x) \mapsto g \cdot x$

$$1) \forall x \in E \quad 1_G \cdot x = x$$

$$2) \forall g, g' \in G \quad \forall x \in E \quad g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$$

Définition 24: L'ensemble $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ est appelé le stabilisateur de x sous l'action de G

• Soit $x \in E$, l'ensemble $O_x = \{gx \mid g \in G\} \subseteq E$ est appelé orbite de x sous l'action de G .

Théorème 25: Si $G \curvearrowright E$, soit $x \in E$, on a

$$|O_x| = [G : \text{Stab}_G(x)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(x)|}$$

Théorème 26: (Equation aux classes)

Soit G un groupe fini agissant sur E fini. En notant $O_{x_1}, \dots, O_{x_r}$ les orbites ≥ 2 distinctes, on a:

$$|E| = \sum |O_{x_i}| = \sum \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(x_i)|}$$

Proposition 27: (Formule de Burnside) DEV 1

Soit $G \curvearrowright E$ tout deux finis. On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des orbites de E sous l'action de G . Alors on a

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| \quad \text{où } \text{Fix}(g) = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$$

Théorème 28: (Dixon)

Soit G un groupe fini d'ordre n , non abélien.

On note k le nombre de classes de conjugaison de G et $P(G)$ la probabilité que 2 éléments de G tirés uniformément et indépendamment commutent. Alors

$$P(G) = \frac{k}{n} \leq \frac{5}{8}$$

III - Dénombrement en analyse

1) En probabilité discrète.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

[G] Définition 29: La Bi définie par $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ pour tout
322 $A \in \mathcal{A}$ est la Bi uniforme.

349 Définition 30: Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire.
On dit que X suit une Bi de Bernoulli de
paramètre p , noté $X \sim B(p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et
 $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$

Remarque 31: Il s'agit de la loi modélisant un tirage
à pile ou face avec une pièce déséquilibrée.

342 Définition 32: Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable
aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) ,
noté $X \sim B(n, p)$ si $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque 33: Cette Bi compte le nombre de succès

2) Utilisation des séries

312 Application 34: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note D_n l'ensemble des
permutations de $\{1, \dots, n\}$ sans point fixe. (On appelle cela
des dérangements). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a que

$$n! = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} d_p \quad \text{où } d_p = |D_p|$$

$$\text{Ainsi } |D_n| = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Application 35: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le même
nombre de Bi comme le nombre de partitions de
l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ avec $B_0 = 1$.

Alors on a que ces nombres vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

DEV2

[Fran
Alg]

→ se retrouve dans beaucoup de branches des mathématiques } Probabilités : stratégies de jeux...

Objectifs de la leçon :

- * présenter les techniques élémentaires mais fondamentales
- * analyser des situations concrètes

190: Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

Cardinal

- * bijection avec des ensembles + simples
- * majoration
- * principe des tiroirs
- * crible

Outils de base

Listes et arrangements

- tirages successifs avec remise (jeux de cartes...)
- tirages successifs sans remise

→ partitions pour trouver le cardinal d'un ensemble

Combinaisons

- tirages simultanés
- $\binom{n}{p}$
- Binôme

- * proba discrète $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
- nb de succès
- tirage pile ou face

- * cardinal d'un groupe et de ses elmts
- ↳ Lagrange

En Algèbre

Utilisation

- * utilisation des actions de groupes pour compter

- ↳ relation orbite stabilisateur
- ↳ equation aux classes
- ↳ formule de Burnside

Th de Dixon

DEV1

proba

En Analyse

utilisation des séries

dérangements

Nb de Bell DEV2