

[Rom]
[G]
[Gi]

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Ex et application

E $\mathbb{R}$ -ev de dim $n \geq 2$

I - Formes bilinéaires et formes quadratiques

- def forme bilinéaire / symétrique + ex [Rom] 461-464
- matrice $\varphi(x, y) = {}^t XAY$ [G] 241
- chgt de base
- def forme quadratique
- forme polaire
- matrice + exemple

II - Orthogonalité et isotropie [Rom] 465-468

- def vecteurs orthogonaux
- orthogonal de X + prop
- cône isotrope
- noyau
- ker $q \subset C_q$
- non dégénéré
- forme définie
- $\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$
- $E = F \oplus F^\perp$

III - Réduction et classification des formes quadratiques

1) Réduction de Gauss [Rom] 469

- Th de réduction de Gauss + exemple
- existence base q -orthogonal

2) Signature [Rom] 475-476

- def pos et négative
- CS

DEV 1

- Th Sylvester

[Gn] 289

- Critère de Sylvester

[Rom] 478

- Chokshy

691

- signature

DEV 2

- ex de la trace [Rom]

IV - Coniques

[Gn] 241

$\mathbb{K}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle$

- def

- prop

171: Formes quadratiques réelles. Coniques Exemples et applications

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

I-Formes bilinéaires et formes quadratiques

Définition 1: Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall (x, y) \in E^2$
 $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ $z \mapsto \varphi(x, z)$ et $z \mapsto \varphi(z, y)$
 sont linéaires.

une forme bilinéaire est dite symétrique si
 $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \quad \forall x, y \in E$

Exemple 2: Sur $\mathbb{R}^2$ $\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ est une forme bilinéaire

Définition 3: La matrice d'une forme bilinéaire φ dans la base β de E est donnée par $A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$

Proposition 4: On a $\varphi(x, y) = x^T A y$

Théorème 5: une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est symétrique

Théorème 6: Soient β_1 et β_2 deux bases de E et P la matrice de passage de β_1 à β_2 . Soit $A_1 = \text{Mat}_{\beta_1}(\varphi)$, $A_2 = \text{Mat}_{\beta_2}(\varphi)$. Alors $A_2 = P^T A_1 P$

Définition 7: On appelle forme quadratique sur E une application q de E dans $\mathbb{K}$ définie par $q(x) = \varphi(x, x) \quad \forall x \in E$, où φ est une forme bilinéaire sur E

Théorème 8: Si q est une forme quadratique sur E , il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ tel que $q(x) = \varphi(x, x) \quad \forall x \in E$.

On a: $\varphi(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$

Définition 9: Avec les notations du Théorème 8, on dit que φ est la forme polaire de q

Définition 10: On appelle matrice et rang d'une forme quadratique q , la matrice et le rang de la forme polaire associée

Exemple 11: Dans $\mathbb{R}^3$ $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ une forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [6] 241

II-Orthogonalité et isotropie

Désormais q est une forme quadratique sur E de forme polaire φ .

Définition 12: deux vecteurs $x, y \in E$ sont dit orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x, y) = 0$

si $x \in E$, l'orthogonal de x relativement à φ est $x^\perp = \{y \in E, \varphi(x, y) = 0 \quad \forall y \in E\}$

Proposition 13: $\cdot \text{fo}^\perp = E$, $\cdot x^\perp$ est un sev de E
 $\cdot x \subset (x^\perp)^\perp$ $\cdot x \subset y \Rightarrow y^\perp \subset x^\perp$

Définition 14: On dit que $x \in E$ est isotope pour q si $q(x) = 0$. On a le cône isotope de q .

$$C_q = q^{-1}(\{0\}) = \{x \in E, q(x) = 0\}$$

Définition 15: Le noyau de φ (resp q) est l'orthogonal de E .
 $\ker(\varphi) = \ker(q) = \{y \in E, \forall x, y) = 0 \forall x \in E\}$

Proposition 16: $\ker(q) \subset C_q$

Proposition 17: Le noyau de q correspond au noyau de la matrice associée dans une base quelconque

Définition 18: On dit que φ (ou q) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Définition 19: On dit que q est définie si $q(x) \neq 0 \forall x \in E \setminus \{0\}$

Définition 20: Si E est de dimension finie égale à n , le rang de φ (ou q) est $\text{rg}(q) = n - \dim(\ker(q))$

Théorème 21: Pour tout SEV de E , on a:
 $\dim F + \dim(F^\perp) = \dim E$, l'égalité étant réalisée pour q non dégénérée. L'égalité $E = F \oplus F^\perp$ est réalisée si la restriction de q à F est non dégénérée.

III - Réduction et classification des formes quadratiques

1) Réduction de Gauss

Théorème 22: Pour toute forme quadratique non nulle q sur E , il existe $r \in \mathbb{N}$, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{1 \leq i \leq r}$ linéairement indépendantes dans E^* telles que $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i^2(x)$ et il existe une base

Exemple 23: $q(x) = xy = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2$

2) Signature

Définition 24: 1) On dit que q est positive si $q(x) \geq 0 \forall x \in E$

2) On dit que q est définie positive si $q(x) > 0 \forall x \in E \setminus \{0\}$

Remarque 25: On définit de manière analogue les formes quadratiques négatives et définies négatives

Lemme 26 (Cauchy-Schwarz) Si q est positive, on a

$$|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)} \sqrt{q(y)} \quad \forall x, y \in E$$

Théorème 27 (Sylvester) Il existe une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$

de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ on a

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_r^2$$

càd $\text{Mat}_\beta(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \text{rg}(q)$

Le couple $(p, r-p)$ noté $\text{sig}(q)$ est la signature de q

Théorème 28: (critère de Sylvester) DEVI

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$,

A est définie positive si et seulement si tous ses déterminants principaux sont strictement positifs.

Théorème 29: (Cholesky)

Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et vérifie $A = B^t B$

475

476

477

478

691

Proposition 30: DEV 2

L'application $q: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(M) = \text{tr}(M^2)$ est une forme quadratique non dégénérée de rang n^2 et de signature $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$

Application 31: $S_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a de plus $q|_{S_n(\mathbb{R})}$ est définie positive et $q|_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$ est définie négative

IV coniques

On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Définition 32: Soit q une forme quadratique non nulle et φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. On appelle conique l'ensemble $C = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid q(v) + \varphi(v) = k\}$ où $k \in \mathbb{R}$

Proposition 33: Si (e_1, e_2) est la base canonique et $v = Xe_1 + Ye_2$, l'équation d'une conique est du type $ax^2 - 2bxy + cy^2 + dx + ey + k = 0$ où $(a, b, c, d, e, k) \in \mathbb{R}$

Proposition 34: Il existe (v_1, v_2) base orthogonale pour q et $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ainsi si $v = X'v_1 + Y'v_2$, l'équation de la conique s'écrit dans la nouvelle base:

$$ax'^2 + by'^2 - 2rx' - 2sy' = k$$

où $a = q(v_1)$, $b = q(v_2)$, $-2r = \varphi(v_1)$ et $-2s = \varphi(v_2)$

Théorème 35: Soit C une conique définie par l'équation $q(v) + \varphi(v) = k$. On suppose que $C \neq \emptyset$ et C ne se réduit pas à un point. Alors

1) Si $\text{sgn } q = (2, 0)$ alors C est une ellipse

2) Si $\text{sgn}(q) = (1, 1)$ alors C est une hyperbole

3) Si $\text{sgn}(q) = (1, 0)$ alors C est une parabole

[Gn]

425

Formes bilinéaire
symétrique
 $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

forme quadratique
 $q(x) = \varphi(x,x)$

forme polaire

$\approx$ produit scalaire donc
notion d'orthogonalité
 $x \perp y$ si $\varphi(x,y) = 0$

$\hookrightarrow$ cône isotrope
 $q^{-1}(\{0\})$

$\uparrow$ U

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(q)$$

$\hookrightarrow$ on étudie la matrice
de la forme bilinéaire
associée qui a les
m propriétés

$$A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$$

$$\varphi(x,y) = {}^t X A Y$$

171: Formes quadratiques réelles
Coniques. Ex et applications

on peut aussi les
classifier

Coniques

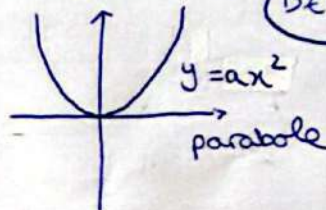
$\rightarrow$ interprétation géométrique
des formes quadratiques

$\rightarrow$ application en physique

Exemple dans l'espace
de matrice

$$q(H) = \text{tr}(H^2)$$

DEV 2



Reduction et classification

$\rightarrow$ Gauss: Somme de carrés de
formes linéaire indépendantes

Espaces euclidiens
formes def pos

critère Sylvester

décomposition Cholesky

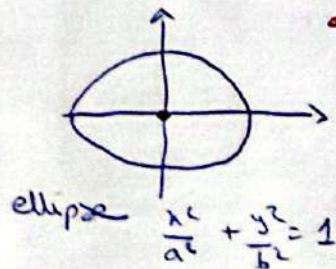
DEV 1

Signature

Sylvester

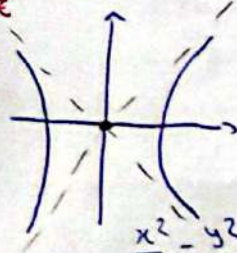
$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{r-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = \text{rang}(q)$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

• centre



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$