

[Rom]

[G]

[Gn]

170: Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications

K corps commutatif de caractéristique $\neq 2$ et E un K -ev de dim $n \geq 2$

I- Formes bilinéaires et formes quadratiques

- def forme bilinéaire / symétrique + ex [Rom] 461-464
- matrice $\varphi(X, Y) = XAY$ [G] 241
- chgt de base
- def forme quadratique
- forme polaire
- matrice + exemple

II- Orthogonalité et isotropie [Rom] 465-468

- def vecteurs orthogonaux
- orthogonal de X + propriété
- cône isotrope
- noyau
- $\ker(q) \subset C_q$
- non dégénéré
- défini
- $\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$
- $E = F \oplus F^\perp$

III- Réduction et classification des formes quadratiques

1) Réduction de Gauss [Rom] 469

- Th réduction de Gauss + exemple

2) Classification sur $\mathbb{C}$ [Gn] 288

- Th $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

• corollaire BON

3) Classification sur $\mathbb{R}$ [Rom] 475-476

- def pos et positive
- Cauchy-Schwarz
- Th Sylvester [Gi] 289
- Critère de Sylvester
- Cholesky [Rom] 478 681

DEV1

III - Applications

1) Exemple sur $M_n(\mathbb{R})$: La trace [Rom]

DEV2

- $q(M) = \text{tr}(M^2)$
- $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$

2) Groupe orthogonal associé à q [Gi] 241

- transformation orthogonale
- propriétés
- det.
- $O_n(\mathbb{R})$

170: Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications

[Rom] 461 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$

I-Formes bilinéaires et formes quadratiques

Définition 1: Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall (x, y) \in E^2$
 $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ $z \mapsto \varphi(x, z)$ et $z \mapsto \varphi(z, y)$
sont linéaires.

une forme bilinéaire est dite symétrique si
 $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \quad \forall x, y \in E$

464 Exemple 2: Sur $\mathbb{R}^2$ $\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ est une forme bilinéaire

462 Définition 3: La matrice d'une forme bilinéaire φ dans la base β de E est donnée par $A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$

Proposition 4: On a $\varphi(x, y) = x^T A y$

Théorème 5: Une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est symétrique

Théorème 6: Soient β_1 et β_2 deux bases de E et P la matrice de passage de β_1 à β_2 . Soit $A_1 = \text{Mat}_{\beta_1}(\varphi)$, $A_2 = \text{Mat}_{\beta_2}(\varphi)$. Alors $A_2 = P^T A_1 P$

Définition 7: On appelle forme quadratique sur E 464 une application q de E dans $\mathbb{K}$ définie par $q(x) = \varphi(x, x)$ $\forall x \in E$, où φ est une forme bilinéaire sur E

Théorème 8: Si q est une forme quadratique sur E , il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ tel que $q(x) = \varphi(x, x) \quad \forall x \in E$.

On a: $\varphi(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$

Définition 9: Avec les notations du théorème 8, on dit que φ est la forme polaire de q

Définition 10: On appelle matrice et rang d'une forme quadratique q , la matrice et le rang de la forme polaire associée

Exemple 11: Dans $\mathbb{R}^3$ $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ une [G] forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 241

II-Orthogonalité et isotropie

Desormais q est une forme quadratique sur E de 465 forme polaire φ .

Définition 12: deux vecteurs $x, y \in E$ sont dit orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x, y) = 0$

Si $x \in E$, l'orthogonal de x relativement à φ est $x^\perp = \{y \in E, \varphi(x, y) = 0 \quad \forall x \in x^\perp\}$

Proposition 13: $\cdot \{0\}^\perp = E$, $\cdot x^\perp$ est un sev de E 466
 $\cdot x \in (x^\perp)^\perp$ $\cdot x \in y^\perp \Rightarrow y^\perp \subset x^\perp$

Définition 14: On dit que $x \in E$ est isotope pour q si $q(x) = 0$. On a le cône isotope de q .

$$C_q = q^{-1}(\{0\}) = \{x \in E, q(x) = 0\}$$

466 Définition 15: Le noyau de φ (resp q) est l'orthogonal de E .
 $\ker(\varphi) = \ker(q) = \{y \in E, \forall x, y) = 0 \forall x \in E\}$

Proposition 16: $\ker(q) \subset C_q$

Proposition 17: Le noyau de q correspond au noyau de la matrice associée dans une base quelconque

467 Définition 18: On dit que φ (ou q) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Définition 19: On dit que q est définie si $q(x) \neq 0 \forall x \in E \setminus \{0\}$

Définition 20: Si E est de dimension finie égale à n , le rang de φ (ou q) est $\text{rg}(q) = n - \dim(\ker(q))$

468 Théorème 21: Pour tout sev de E , on a:
 $\dim F + \dim(F^\perp) \geq \dim E$, l'égalité étant réalisée pour q non dégénérée. L'égalité $E = F \oplus F^\perp$ est réalisée ssi la restriction de q à F est non dégénérée.

III - Réduction et classification des formes quadratiques

469 1) Réduction de Gauss

Théorème 22: Pour toute forme quadratique non nulle q sur E , il existe $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{1 \leq i \leq r}$ linéairement indépendantes dans E^* telle que $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \ell_i^2(x) \forall x \in E$

Exemple 23: $q(x) = xy = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2$

2) Classification sur $\mathbb{C}$

On suppose que $K = \mathbb{C}$

Théorème 24: Il existe une base $\beta = (e_i)_{1 \leq i \leq r}$ de E telle que [En] 288
 si $x = \sum_{i=1}^r x_i e_i$ alors $q(x) = \sum_{i=1}^r x_i e_i$ $r = \text{rg } q$

Ainsi $\text{Mat}_\beta(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 25: Il existe une base orthonormée pour q ssi $\text{rg}(q) = n$ (càd ssi q est non dégénérée)

3) Classification sur $\mathbb{R}$

On suppose $K = \mathbb{R}$

Définition 26: 1) On dit que q est positive si $q(x) \geq 0 \forall x \in E$ 475

2) On dit que q est définie positive si $q(x) > 0 \forall x \in E \setminus \{0\}$

Remarque 27: On définit de manière analogue les formes quadratiques négatives et définies négatives. 476
Lemme 28 (Cauchy-Schwarz) Si q est positive, on a alors $|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)} \sqrt{q(y)} \forall x, y \in E$

Théorème 29 (Sylvester) Il existe une base $\beta = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ on a 289
 $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

càd $\text{Mat}_\beta(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \text{rg}(q)$

le couple $(p, r-p)$ noté $\text{sig}(q)$ est la signature de q

Ram
478 Théorème 30: Critère de Sylvester DEV 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est définie positive ssi tous ses déterminants principaux sont strictement positifs.

691 Théorème 32: (Cholesky)
Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $\exists$ matrice réelle B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et vérifient $A = BB^t$.

III - Applications

1) Exemple sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: La trace

Proposition 33: DEV 2

L'application $q: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(M) = \text{tr}(M^2)$ est une forme quadratique non dégénérée de rang n^2 et de signature $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Application 34: $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$. On a de plus que $q|_{\mathcal{U}_n(\mathbb{R})}$ est définie négative et $q|_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$ est définie positive.

2) Groupe orthogonal associé à q

Gri
249 Définition 35: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une transformation orthogonale si $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) \quad \forall x, y \in E$.

Proposition 36: Les propriétés suivantes sont équivalentes

- 1) $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) \quad \forall x, y \in E$
- 2) $q(f(x)) = q(x) \quad \forall x \in E$
- 3) $\exists$ $A \in \mathcal{M}_B(f)$ est une BON et $A = \text{Mat}_B(f)$ alors ${}^tAA = I$

Propriétés 37: Soit f une transformation orthogonale. Alors: les valeurs propres de f sont $+1$ ou -1 et $\det f = \pm 1$.

Définition 38: L'ensemble $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

$$q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forme bilinéaire symétrique $\longrightarrow$ forme quadratique

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

$$q(x) = \varphi(x, x)$$

forme po laire

$\approx$ produit scalaire

donc on a la notion d'orthogonalité

$$x \perp y \text{ si } \varphi(x, y) = 0$$

On étudie la matrice de la forme bilinéaire associée qui a les mêmes propriétés

$$A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$$

$$\varphi(x, y) = \tilde{x} A y$$

Exemple dans les espaces de Matrices

$$\varphi(M) = \text{tr}(M^2)$$

DEV2

Groupe orthogonal

$\rightarrow$ géométrie

$\rightarrow$ cas particulier $\det = \pm 1$

170: Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. orthogonalité. Applications

outil réduction de Gauss des forme de carré de forme linéaires indep

Classification?

Dans $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ signature

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans $\mathbb{C}$

uniquement grâce à leur rang

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = r(q)$$

cas particulier: forme quadratique def pos = prod scalaire

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Mineur} > 0$$

Espace euclidien

DEV4

Reduction de Cholesky

Cône isotrope

$$q^{-1}(\{0\})$$

$$U \text{ Ker}(\varphi) = \text{Ker}(q)$$

$\nabla F \nabla F^T \neq \{0\}$ à cause de cette inclusion

si q non dégénéré

$$E = F \oplus F^\perp$$