

[Gi] Rom
[Gi] a
[Ber]

162: Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

I - Généralités sur les systèmes linéaires

1) Définitions [Gi] 37 143

- def = forme matricielle
- solution $AX=B$

2) Pivot et système échelonné [Gi] [Gi] 82

- def matrice échelonnée
- exemple
- système échelonné
- $O(n^2)$ opérations

3) Système de Cramer [Gi] 142

- def
- Th solution
- $O(n!)$

II - Résolution pratique

1) Matrices élémentaires [Ber] [Rom] 54 [Gi] ?

- def transvection dilatation^{76 79}
- prop inverse
- matrice permutation
- opérations sur le système
- $S_n(K)$ engendré par les transvection
- $GL_n(K)$ engendré par les transvection et dilatation

2) Pivot de Gauss [Gi] 73

- algo

• $O(n^3)$

III - Applications

1) Factorisation LU et Cholesky [Rom] 478 690 691

DEV 1

- LU
- critère de Sylvester
- Cholesky

2) En algèbre linéaire [Ber] 964

DEV 2

- def nilpotente
- A nilpotente $\Leftrightarrow \text{tr}(A^k) = 0 \quad \forall k$

IV - Méthodes itératives [CIA]

162: Systèmes d'équations linéaires, opérations
démonstratives, aspects algorithmiques et conséquences
théoriques

I - Généralités sur les systèmes linéaires

1) Définitions

[Gn] Définition 1: On appelle système d'équations linéaire
37 un système du type:

$$(M) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \quad \text{où les } x_i \text{ sont dites} \\ \text{inconnues et résoudre le} \\ \text{système signifie déterminer} \\ \text{les } x_i, \text{ s'il y en a qui} \\ \text{vérifient toutes les équations}$$

Remarque 2: On écrit le système précédent sous la

143 forme matricielle $AX = B$
avec $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(K)$
 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(K)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$

Proposition 3: Si $A \in GL_n(K)$, $AX = B$ admet une unique
solution $\forall b \in K^n$

2) Pivot et système échelonné

Définition 4: Une matrice est échelonnée si les lignes
commencent par un nombre de zéros strictement croissant
à mesure que l'indice augmente.

Exemple: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonné. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas

Définition 6: Le système (M) est dit échelonné si
 $A \in M_{p,n}(K)$ est échelonnée

Proposition 7: Si $A \in GL_n(K)$ est une matrice échelonnée
et $b \in K^n$, alors l'unique solution de $AX = b$ peut
être obtenue en $O(n^2)$ opérations (méthode de la
remontée)

2) Système de Cramer

Définition 8: On appelle système de Cramer un
système linéaire dont la matrice A est carrée et
inversible.

Théorème 9: Un système de Cramer $AX = b$ où
 $A = [C_1, \dots, C_n] \in GL_n(K)$ et $b \in K^n$ admet pour unique
solution $x = (x_1, \dots, x_n)$ où

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad x_i = \frac{\det[C_1, \dots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \dots, C_n]}{\det A}$$

Remarque 10: La complexité de la méthode de Cramer
est $O(n!)$

II - Résolution pratique

1) Matrices élémentaires

Définition 11: Une matrice de transvection (resp. dilatation)
de $M_n(K)$ est une matrice de la forme:

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_i \quad \text{resp } D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_i$$

où $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$

76 Proposition 12: Soient $T_{ij}(\lambda)$ matrice de transvection et $D_i(\lambda)$ matrice de dilatation. Alors:

79 1) $T_{ij}(\lambda) \in SL_n(K)$ et $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

2) $D_i(\lambda) \in GL_n(K)$ et $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$

[Rom] Définition 13: Soit $\sigma \in S_n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n . La matrice de permutation associée à σ , notée P_σ est $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

54 Proposition 14: Soit $\sigma \in S_n$, $P_\sigma \in GL_n(K)$ et $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$

[Gi] Proposition 15: L'ensemble des solutions du système linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équations les "opérations élémentaires" suivantes:

1) Changer l'ordre des équations

2) multiplier une équation par un scalaire non nul

3) ajouter à une équation une combinaison

linéaire des autres

Remarque 16: Cela revient à appliquer à A les matrices de Dilatation, Transvection et permutation

[Ber] Théorème 17: 1) Toute matrice $M \in SL_n(K)$ est produit de matrices de transvections

2) Toute matrice $M \in GL_n(K)$ est produit de matrices de transvection et d'au plus une matrice de dilatation

2) Pivots de Gauss

[Ca] 73 Algorithme 18: Soit $A \in M_{p,n}(K)$. L'algorithme du pivot de Gauss consiste à transformer A en une

matrice échelonnée en la multipliant à gauche par des matrices de transvections et de transpositions

Proposition 19: Si $A \in M_n(K)$, le pivot de Gauss est réalisé en $O(n^3)$ opérations

III - Applications

1) Factorisation LU et Cholesky

Théorème 20: Si $A \in GL_n(K)$, alors A admet une décomposition $A = LU$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U est triangulaire supérieure si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. [DEV 1 a)]

Théorème 21: (Critère de Sylvester)

Soit $A \in S_n(K)$ A est définie positive ssi tous ses déterminants principaux sont strictement positifs.

Théorème 22: (Cholesky) [DEV 1 b)]

Si $A \in S_n^{++}(K)$ alors $\exists!$ matrice réelle B triangulaire inférieure tel que tous ses éléments diagonaux soient positifs et vérifie $A = BB^T$

2) En Algèbre linéaire

Définition 23: Soit $A \in M_n(K)$, A est nilpotente si $\exists k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Théorème 24: Soit $A \in M_n(K)$ [DEV 2]
A nilpotente $\Leftrightarrow \text{tr}(A^k) = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq n$

35

IV - Methodes iteratives

Au cœur de l'AL

En science tout les modèles se décrivent pour revenir à un traitement de syst linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

$\Leftrightarrow AX=B$ $\rightarrow$ unique solution
si $A \in GL_n(\mathbb{R})$
(on inverse A)

162: Systèmes d'équations linéaires. Opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

$\rightarrow$ sinon échelonnée
 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $O(n^2)$ opérations

Applications

LU et Cholesky

$$AX=B$$

$$A=LU \quad \text{ou} \quad A=B^t B$$

Algèbre linéaire

A nilpotente ssi $\text{tr}(A^k)=0$
 $\forall k$

En pratique

Pivot de Gauss $O(n^3)$ opér^o

- $\rightarrow$ matrice élémentaire
- transvection $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$
- rotation $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$
- permutation

$\rightarrow$ système Cramer
 $A \in GL_n(K)$
 $O(n!)$

On change pas un système linéaire si on multiplie par ces matrices