

[G] [CaH]

[Rom]

[Gn]

157 Matrices symétriques réelles - hermitiennes

I- Matrices symétriques et hermitiennes

1) Déf et propriétés générales [G] 240-241

- déf $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ + exemple
- dim $S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

- déf mat hermitienne + exemple

- dim $H_n(\mathbb{C}) = n^2$ $A_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus iA_n(\mathbb{R})$

- déf matrice positive et déf pos. [Rom] 735

2) Lien avec les formes quadratiques et hermitiennes [G] 239-240

- déf formes bilinéaire symétrique, formes quadratiques
forme sesquilinéaire, forme polaire unitaire

- Matrices

241-242

- lien avec les matrices symétriques

II- Réductions

1) Théorème spectral [G] [Gn] 254

- déf base q -orthogonale ²⁴³⁻²⁵⁶
- endomorphismes symétriques
- Th spectral

DEV 1

2) Réduction d'une forme quadratique [Rom] 469

- Th de réduction de Gauss 476
- Th Sylvester 478
- signature

III- Applications [CaH] 351-355

1) Homomorphisme

- ^{Th spectral} déf exponentielle de matrice

DEV 2

- Homomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- def $S_n^{++}(\mathbb{R})$

2) Décomposition polaire [Rom] 746

- Dans $GL_n(\mathbb{R})$
- Dans $M_n(\mathbb{R})$

157: Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

I - Matrices symétriques et hermitiennes

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1: On dit que $A \in M_n(K)$ est symétrique (resp. antisymétrique) si ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$) et on note $S_n(K)$ (resp. $U_n(K)$) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) réelles.

Proposition 2: $1) M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus U_n(\mathbb{R})$

2) $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(U_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$

Définition 3: On dit que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si ${}^t\bar{A} = A$. On note $H_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{R}$ -ev des matrices hermitiennes

Proposition 4: $1) M_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus iU_n(\mathbb{R})$

2) $\dim H_n(\mathbb{C}) = n^2$

Définition 5: Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp. définie positive) si elle est symétrique avec ${}^tXAX \geq 0 \forall X \in \mathbb{R}^n$ (resp. ${}^tXAX > 0 \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

2) lien avec les formes quadratiques et hermitiennes

Définition 6: On dit que $\varphi: E \times E \rightarrow K$ est bilinéaire si

$\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et si $\forall y \in E, x \mapsto \varphi(x, y)$ linéaire

Définition 7: On dit que $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire si $\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et $\forall y \in E, x \mapsto \varphi(x, y)$ est anti-linéaire:

$$\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda \varphi(x_2, y)$$

Exemple 8: Si $E = C([0, 1], \mathbb{C})$ alors $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt \text{ est une forme sesquilinéaire sur } E.$$

Définition 9: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $\varphi: E \times E \rightarrow K$ bilinéaire. Alors la matrice $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée matrice de φ dans la base B .

$$\text{On a } \varphi(x, y) = {}^tXY \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Si φ est sesquilinéaire alors $\varphi(x, y) = {}^t\bar{X}MY$.

Définition 10: Soit φ forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) M la matrice de φ dans une certaine base B de E et M' dans une autre base B' de E .

Alors $\exists P \in GL_n(K)$ tel que $M' = {}^tPMP$ (resp. $M' = \bar{P}MP$) on dit que M et M' sont congruentes

Définition 11: Soit φ une forme bilinéaire sur E . On dit que

1) φ est symétrique si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \forall x, y \in E$

2) φ est antisymétrique si $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x) \forall x, y \in E$

3) si $K = \mathbb{C}$, φ hermitienne si $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)} \forall x, y \in E$

Proposition 12: une forme bilinéaire est symétrique (resp. antisymétrique) si sa matrice dans une base

est symétrique (resp antisymétrique).

• une forme sesquilinéaire est hermitienne ssi sa matrice dans une base est hermitienne.

Définition 13: On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme $q: E \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \varphi(x, x)$ où φ est une forme bilinéaire sur E .

Définition 14: On appelle forme hermitienne sur E toute application de la forme $\phi: E \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \varphi(x, x)$ où φ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E .

Proposition 15: Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne). Il existe une unique forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire hermitienne) φ tel que $\forall x \in E \quad q(x) = \varphi(x, x)$.

La forme φ s'appelle la forme polaire de q .

Exemple 16: Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(q) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

II - Réductions

1) Théorème spectral

Définition 17: Une base $\mathcal{B}$ de E est dite q -orthogonale si pour tout couple distincts (e, e') de $\mathcal{B}$, on a $\varphi(e, e') = 0$.

Théorème 18: Si E est de dimension finie, il existe une base q -orthogonale.

Définition 19: Un endomorphisme f d'un espace euclidien

est dit symétrique si $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$

Théorème 20: Soit $f \in \text{GL}(E)$ symétrique. Alors:

1) f est diagonalisable

2) les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux

Théorème 21: Soit E espace hermitien et $f \in \text{GL}(E)$ symétrique. Alors il existe une B.O.N de vecteurs propres de f .

2) Réduction d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique de forme polaire φ

Théorème 22: (Réduction de Gauss) Si q est non nulle, il existe $r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ et des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ et des formes linéaires $(l_i)_{1 \leq i \leq r}$ linéairement indépendantes dans E^* tels que $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i l_i^2(x) \quad \forall x \in E$

Théorème 23: (Sylvester) Soit $A \in \text{S}_n(\mathbb{R})$ de rang r . Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^t P A P = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

où $s, t \in \mathbb{N}$ et $r = s + t$

Proposition 24: Il existe un unique couple $(s, t) \in \mathbb{N}^2$ tel que pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E orthogonale pour q , le nombre de vecteurs e_i tq $q(e_i) > 0$ est s et le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) < 0$ est t . De plus $\text{rg}(q) = s + t$ et on appelle ce couple la signature de q , notée $\text{sgn}(q)$.

Théorème 25: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de q dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. La forme q est définie positive si, et seulement si, tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs

III - Applications

1) Homéomorphismes

Proposition 26: Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^t)}$$

où ρ est le rayon spectral donné par:

$$\rho(M) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| : \lambda_i \in \rho(M)$$

Définition 27: On définit sur $\mathbb{K}$:

$$\exp: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$$

$$A \mapsto \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Définition 28: $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \text{ définie positive}\}$

$H_n^{++}(\mathbb{C}) = \{A \in H_n(\mathbb{C}) \text{ définie positive}\}$

Théorème 29: L'application

DEVZ

$$\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un homéomorphisme}$$

Théorème 30: L'application

$$\exp: H_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n^{++}(\mathbb{C}) \text{ est un homéomorphisme}$$

2) Décomposition polaire

Théorème 31: Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = O \cdot S$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Théorème 32: Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = O \cdot S$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ diag? long avec poly caractéristique

→ Th Central

↓
Th Spectral DEU 1

On voit d'un coup d'œil si une matrice est diag + c'est diag dans un B.V.

157: Matrices symétriques réelles - hermitiennes

vrai → matrice symétrique

$A^t = A$

faux → matrice hermitienne
 $\overline{A^t} = A$
 enoncé analogue

Homomorphismes

exp $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ [DEU 2]
 $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n^{++}(\mathbb{R})$

Applications

Décomposition polaire

$A = O \underbrace{S}_{\text{orthogonale}}^{\text{sym}}$

séquentiel
 lien forme quadratique et matrice symétrique et hermitienne
 → On associe forme quadratique avec matrice symétrique.
 forme séquentielle avec matrice hermitienne.

$\rightarrow \varphi(x,y) = {}^t X M Y$ forme polaire
 $\rightarrow q(x) = \varphi(x,x)$ unique

réduction
 réduction de Gauss
 Sylvester