

[Rom]
[Ber]
[Man]

156. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

I- Endomorphismes trigonalisables

1) Critères de trigonalisation [Rom] 675-676 [Ber]

[Man] 105-106 946-948

- def
- $\text{endo trigo} \Leftrightarrow \text{sa matrice est trigo}$
- lemme des noyaux [Rom] 609
- Th Cayley Hamilton
- Th u trigo $\Leftrightarrow u$ admet un poly annulateur scindé
- Coro u trigo $\Leftrightarrow \exists p$ scindé
- exemples
- Th endomorphismes de E est trigo
- App $\det e^A = e^{\text{Tr}(A)}$ $A \in M_n(\mathbb{C})$
- $u|_F$ trigo F ss espace stable par u
- Prop u trigo alors $\text{tr} u = \sum \lambda_i$ $\det u = \prod \lambda_i$

2) Cotrigonalisation [Man]

- def
- prop : $uv = vu \Rightarrow \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$ stable par v
- Th de cotrigonalisation

DEV 1

II- Endomorphismes nilpotents

1) Résultats fondamentaux [Ber] 964 [Man]

- def + exemples
- prop : u nilpotent $\Leftrightarrow 0$ est l'unique vp
 $\Leftrightarrow u$ annulé par un monome non nul
- Th : critère de nilpotence par la trace
- Th noyau itérés

DEV 2

2) Exponentielle d'une matrice nilpotente [Man]

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

224

- Rappel def
- def $\exp(N)$ et $\ln(I_n + N)$
- prop $\exp(N)$ et $\ln(I_n + N)$ sont nilpotentes

III - Applications

DEV 3

- 1) Décomposition de Dunford [Ber] 968
[Rom] 761
 - Th
 - décomposition de l'exponentielle d'une matrice
- 2) Réduction de Jordan Nilpotent

156: Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

Soit K un corps commutatif, E un K -ev de $\dim n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$

I- Endomorphismes trigonalisables

1) Critères de trigonalisation

Définition 1: On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Définition 2: On dit que $A \in M_n(K)$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 3 (Lemme des noyaux)

Soient $(p_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de $p \geq 2$ polynômes à 2 premiers entre eux dans $K[X] \setminus \{0\}$ et

$$P = \prod_{k=1}^p P_k. \text{ On a } \ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(P_k(u)) \text{ et } \ker(P_k(u)) \rightarrow \ker(P(u)) \text{ } k \in [1, p] \text{ sont des endomorphismes et minimaux}$$

Définition 4: Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(K)$ est $\chi_A \in K[X]$ défini par $\chi_A = \det(XI_n - A)$

Théorème 5: (Caley Hamilton) $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \chi_u(u) = 0$

Autrement dit $\mu_u | \chi_u$

Théorème 6: u est trigonalisable sur K ssi son polynôme caractéristique est scindé sur K

Exemple 8: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Théorème 9: On a les équivalences suivantes:

- i) u trigonalisable
- ii) il admet un polynôme annulateur scindé
- iii) μ_u est scindé

Exemple 10: $H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

Corollaire 11: Si K corps K est algébriquement clos alors $\forall$ endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable

2) Cotrigonalisation

Définition 12: Soient I un ensemble ayant au moins 2 éléments et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E . On dit qu'une base B de E est une base commune de trigonalisation pour la famille $(u_i)_{i \in I}$ si la matrice T_i de chaque endomorphisme dans cette base est triangulaire

Théorème 13: On considère une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes de E commutant $\forall i, j \in I$ et trigonalisables.

Alors on peut les trigonaliser dans une même base

DEV 1

Alors on peut les trigonaliser dans une même base

2) $\det = \det$

3) A diagonalisable et n est nilpotent de plus d_i et n sont des polynômes en x .

Exemple 26: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 27: Soit $A \in M_n(K)$ telle que $A = D + N$ est la décomposition de Dunford.

Alors la décomposition de Dunford de e^A est

$$e^A = e^D + e^D (e^N - I_n)$$

avec e^D diagonalisable et $e^N (e^N - I_n)$ nilpotente

Théorème 28: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

1) A diagonalisable $\Leftrightarrow A$ diagonalisable

2) $\exp(A) = I_d \Leftrightarrow A$ diagonalisable et

$$\operatorname{Sp}(A) \subseteq \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2) Réduction de Jordan nilpotent

Définition 29: le bloc de Jordan de taille $m \in \mathbb{N}^*$ est la matrice $J_m \in M_m(K)$ telle que

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 30: Soit $x \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors, il existe des entiers $d_1 = \deg \mu_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ et une base dans laquelle la matrice de x est diagonale par blocs avec les blocs $J_{d_1}, \dots, J_{d_r}$. Cette matrice est appelée réduite de Jordan de x .

PQ: endo trige simplifie

les manipulations

(produit de matrice, vp sur la diagonale...)

endo nilpotent: on connaît sa vp et les polynômes annulateurs X^k

sous-classe des endo trige

156: Endomorphismes trige nilpotent

① Endomorphismes trige nilpotent

$$\begin{pmatrix} * & \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

critères

$\rightarrow \mu$ trige ssi χ_μ scindé
ssi μ_μ scindé

$\rightarrow$ corps alg clos: $\#$ endomorphismes est trige

ex $\mathbb{C}$

$\rightarrow$ trige nilpotent simultanée

DEV 1

③ Applications

Dunford

Jordan nilpotent.

② Endomorphismes nilpotent

$$\mu^k = 0 \quad k \geq 1$$

critères:

$$\rightarrow \mu_\mu = X^r$$

$$\chi_\mu \text{ scindé} + S_p(\mu) = \{0\}$$

$$\chi_\mu = X^n$$

$$\rightarrow A \text{ nilp} \Leftrightarrow \text{tr}(A^k) = 0 \quad \forall k \in [0, n]$$

DEV 2

Etude de

l'exponentielle

matrice nilpotente

car + facile

$\hookrightarrow$ logarithme