

[Ber]
[Rom]
[Man]
[CalH]

155 - Exponentielle de Matrices - Applications

I - Définition et premières propriétés [Ber] 987-988

- def norme
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- def exponentielle matricielle
- continuité $\exp: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$
- propriétés

[Rom] 761

[Man] 221-223

II - Exponentielle et Réduction

1) Matrices diagonalisables [Man] 225

- $\exp(D)$ pour D diagonale $\text{ex } \exp(In)$
- $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$ + ex

2) Matrices nilpotentes [Man] 224

- def
- $\exp(A)$ A nilpotente

3) Décomposition de Dunford [Rom] 615

- Th de Dunford
- décomposition de Dunford de l'exponentielle
- diagonalisabilité de l'exponentielle

III - Propriétés remarquables

- Homeomorphisme $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})^{++}$ [CalH] 354
- Différentiabilité [Rom] 307
- $A \in GL_n(\mathbb{C}) \exists P \in \mathbb{C}[X] A = e^{P(A)}$
- $\exp$ est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ ds $GL_n(\mathbb{C})$

IV - Application aux systèmes linéaires à coefficients constants

- $t \mapsto e^{tA}$ dérivable [Man] 228-229
- def syst diff linéaire

• solut^o pb de Cauchy $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

155 - Exponentielle de Matrices. Applications

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \geq 1$ et $A, B \in M_n(K)$

I - Définition et premières propriétés

Définition 1: On définit la norme sur $M_n(K)$ par

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{pour } A = (a_{ij}) \in M_n(K)$$

Proposition 2: On a: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in M_n(K)$

Lemme 3: Soit $A \in M_n(K)$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ est convergente.

Définition 4: On définit l'exponentielle de A par

$$e^A = \exp(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!}$$

Propriété 5: La fonction $\exp$ est continue de $M_n(K)$ dans $M_n(K)$

Proposition 6: On a les propriétés suivantes

1) $\forall A \in M_n(K)$, A et e^A commutent

2) si A et B commutent, on a $e^{A+B} = e^A e^B$

3) $\forall A \in M_n(K)$, e^A inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

4) $\forall P \in GL_n(K)$, $\forall A \in M_n(K)$, on a $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$

5) $(e^A)^T = e^{A^T}$

6) $\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA} A$

7) $\det e^A = e^{\text{tr } A}$

contre exemple 7: Pour avoir le point 2), la commutativité

est importante: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = e^{B+A}$$

II - Exponentielle et réduction

1) Matrices diagonalisables

Propriété 8: Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$ matrice diagonale

$$\text{alors } \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Propriété 9: Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable, il existe $P \in GL_n(K)$ tel que $A = P D P^{-1}$ alors $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$

2) Matrices nilpotentes

Définition 10: $N \in M_n(K)$ est nilpotente si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. Le plus petit p vérifiant ça est appelé indice de nilpotence de N .

Proposition 11: Soit $N \in M_n(K)$ nilpotente d'indice p . Alors $e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$

Définition 12: Soit $N \in M_n(K)$ nilpotente d'indice p . La logarithme de la matrice $I_n + N$ est la matrice $\ln(I_n + N) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$

3) Décomposition de Dunford

Théorème 13: Soit $A \in M_n(K)$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur K . Alors il existe un unique couple $(D, N) \in M_n(K)^2$ tel que:

- $A = D + N$
 - D diagonalisable
 - N nilpotente
 - $DN = ND$
- de plus D et N sont des polynômes en A .

Exemple 14: La décomposition de Dunford de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et celle de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 15: Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors celle de e^A est $e^A = e^D e^N = e^D (e^N - I_n)$

Théorème 16: Soit $A \in M_n(K)$ telle que χ_A est scindé sur K . on a

- 1) A diagonalisable $\Leftrightarrow e^A$ est diagonalisable
- 2) si $K = \mathbb{C}$ $e^A = I_n \Leftrightarrow A$ diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subseteq 2\pi i \mathbb{Z}$

III - Propriétés remarquables

Lemme 17: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = e^{P(A)}$

Proposition 18: L'application $\exp$ est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$

Corollaire 19: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = R^p$

Théorème 20: L'exponentielle de matrice est un homomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Théorème 21: $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est différentiable.

$$D_{\exp}(X)(H) = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\text{ad } X)^k}{k!} H \quad \text{où } \text{ad } X(H) = XH - HX$$

$\in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$

IV - Application aux systèmes linéaires à coefficients constants

Définition 22: Un système différentiel linéaire est une équation $Y' = A(t)Y + B(t)$

d'inconnue $Y: I \rightarrow M_n(K)$, de coefficients $A: I \rightarrow M_n(K)$ et de second membre $B: I \rightarrow M_n(K)$

Le système est à coefficients constants si l'application A est constante, il est homogène si l'application B est nulle

Remarque 23: Une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n de la forme $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = b(t)$

se réécrit $Y' = AY + B$ avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Proposition 18: L'application $\exp$ est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$

Théorème 20: L'exponentielle de matrice est un homomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Théorème 21: $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est différentiable.

$$D_{\exp}(X)(H) = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\text{ad } X)^k}{k!} H \quad \text{où } \text{ad } X(H) = XH - HX$$

$\in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$

IV - Application aux systèmes linéaires à coefficients constants

Définition 22: Un système différentiel linéaire est une équation $Y' = A(t)Y + B(t)$

d'inconnue $Y: I \rightarrow M_n(K)$, de coefficients $A: I \rightarrow M_n(K)$ et de second membre $B: I \rightarrow M_n(K)$

Le système est à coefficients constants si l'application A est constante, il est homogène si l'application B est nulle

Remarque 23: Une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n de la forme $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = b(t)$

se réécrit $Y' = AY + B$ avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Proposition 18: L'application $\exp$ est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$

Proposition 24: Soit $A \in M_n(K)$ et $Y_0 \in M_{n,1}(K)$. Alors le système linéaire homogène à coefficients constants $Y' = AY$ admet exactement une solution vérifiant la condition initiale $Y(0) = Y_0$ et cette solution est $t \mapsto e^{tA} Y_0$.

Lemme 25: Soit $A \in M_n(K)$. Alors la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable de dérivée $t \mapsto A e^{tA} = e^{tA} A$.

exemple avec graphique?

On aimerait retrouver $e^a = e^b$ dans $\mathbb{R}$

But: Généraliser $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
à $\exp: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$
analogie avec le DSE
de l'exponentielle

Cmt définir l'exponentielle?

norme $\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$

$\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ $\rightarrow$ généralisable sur $\mathbb{A}$ $\mathbb{K}$ -algèbre de Banach

$\exp(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ $\subset V$

on définit

$\hookrightarrow$ continue

155: Exponentielle de matrices. Applications

En Algèbre linéaire on s'intéresse à la réduction mais qu'en est-il pour les exp de matrice?

Propriété remarquables et analytique

- Homomorphismes: $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$
- différentiable C^∞
- aide résoudre syst-lin

Décomposition Dunford

λ scindé

A diago $\Leftrightarrow e^A$ diago
 $e^A = I_n \Leftrightarrow A$ diago
 $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$

DEVZ

$\hookrightarrow$ Applications matrices nilpotente car l'exponentielle d'une mat nulp est une somme fini

Prop similaires mais nuances

$e^{A+B} = e^A e^B \quad \Delta \quad AB=BA$

$\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$

$e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$

$\hookrightarrow$ diagonalisabilité

inversible

$\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

log mat nupt