

[Man]
[Rom]

153: Valeurs propres, vecteurs propres
Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Application

I- Elements propres d'un Endomorphisme [Man]

1) Valeurs propres et vecteurs propres p50-53

- def : vp, vecteurs propres, spectre, sous-espace propre
- prop des ss espaces propres
- poly annulateur

2) Polynôme min et caractéristique p4, 54-55, 81-84

- def
- Th Cayley-Hamilton
- multiplicité des racines

II- Application à la réduction des endomorphismes

- Endo diag : équivalence diag et vp [Man] p89
- Endo trigo : lien avec la trace et le det 105
- décomposition de Dunford et exponentielle. 141

[Rom] 778

III- Cas particuliers

1) Matrice compagnon [Rom] 683

2) Matrice nilpotentes

DEV1 : critère de nilpotence par la trace

3) Matrices symétriques

- Th Spectral
- Caractérisation des matrices positives avec le vp

IV - Recherche d'éléments propres

[R] 651

1) Localisation

[Fra Alg2] p 80

DEV2

- matrice à diagonale strictement dominante
- Lemme Hadamard
- disques de Gershgorin
- Th

2) Rayon spectral [R] 742

• def

$$\bullet A \in S_n(\mathbb{R}) \quad \|A\|_2 = \rho(A)$$

$$\bullet \|A\| = \sqrt{\|A^t A\|} = \sqrt{\rho(A^t A)}$$

153: valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications

Soit K un corps. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(K)$

I - Éléments propres d'un endomorphisme

1) Valeurs propres et vecteurs propres

tan] Définition 1: - Une valeur propre λ de u est un scalaire tel que $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injective. $\exists \lambda \in E$ tel que $u(\lambda) = \lambda \lambda$.
L'ensemble des valeurs propres de u est noté $\mathcal{S}(u)$.
• Un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ est un vecteur non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

• Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$. Sa dimension est notée $m_\lambda(u)$.

53 Proposition 2: Les sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Remarque 3: Les sous-espaces propres sont stables par u .

Proposition 4: Soit P un polynôme annulateur de u .

Alors les valeurs propres de u appartiennent à l'ensemble des racines de P .

2) Polynôme minimal et caractéristique

4 Définition 5: Le polynôme minimal de u est l'unique polynôme unitaire noté μ_u , qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de u .

54 Proposition 6: Les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme minimal μ_u .

On note $m_\lambda(u)$ la multiplicité de λ en tant que racine de μ_u .

Définition 7: Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(K)$ est le polynôme unitaire χ_A de degré n défini par $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Définition 8: Le polynôme caractéristique de u est celui de n'importe laquelle de ses matrices.

Proposition 9: Les racines de χ_u sont exactement les valeurs propres de u . On note $m_\lambda(u)$ la multiplicité de λ comme racine de χ_u .

Théorème 10: (Caley-Hamilton) χ_u est un polynôme annulateur de u .

Proposition 11: Soit λ une valeur propre de u . Alors

$$1 \leq m_\lambda(u) \leq m_\lambda(\chi_u) \quad 1 \leq m_\lambda(u) \leq m_\lambda(\chi_u)$$

Exemple 12: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $m_\lambda(1) = 2$
 $m_\lambda(1) = 4$
 $m_\lambda(1) = 3$.

II - Application à la réduction des endomorphismes

Définition 13: u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice est diagonale. C'est à dire il existe une base de vecteurs propres ou encore si E est la somme directe des sous-espaces propres.

Théorème 14: On a équivalence entre:

- 1) u est diagonalisable
- 2) u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- 3) μ_u est scindé à racines simples.
- 4) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \mathcal{S}(u) \quad m_\lambda(u) = m_\lambda(\chi_u)$
- 5) $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n$

165 Définition 15: On dit que u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Théorème 16: On a équivalence entre:

- 106
- 1) u est trigonalisable
 - 2) u possède un polynôme annulateur scindé
 - 3) χ_u et μ_u sont scindés.

Corollaire 17: Soit u trigonalisable. Alors la trace et le déterminant de u sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

141 Théorème 18: (Décomposition de Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur K . Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que:

- $u = d + n$
- n et d commutent
- n nilpotent
- d est diagonalisable

De plus d et n sont des polynômes en u .

Exemple 19: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

10m) Application 20: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a

- 7g
- 1) A diagonalisable $\Leftrightarrow e^A$ est diagonalisable
 - 2) $e^A = I_n \Leftrightarrow A$ est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$

III - Cas particuliers

1) Matrices compagnons

693 Définition 21: Soit $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$. On appelle matrice compagnon de P , notée C_P , la matrice:

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \dots & a_1 & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Proposition 22: On a $\chi_{C_P}(X) = P(X)$

Proposition 23: La matrice C_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

2) Matrices nilpotentes

Définition 24: On dit que u est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$. On dit que p est l'indice de nilpotence de u .

Proposition 25: On a équivalence entre:

- 1) u nilpotent
- 2) $\chi_u(X) = X^n$
- 3) $\mu_u = X^p$
- 4) u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.

Théorème 26: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

On a $\text{Tr}(A^k) = 0 \forall k \in [1, n] \Leftrightarrow A$ est nilpotente

3) Matrices symétriques

On suppose ici que E est euclidien.

Définition 27: Un endomorphisme u de E est dit symétrique si $u = u^*$, c'est à dire: $\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Lemme 28: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors $F^\perp$ est stable par u .

Proposition 29: Si u est symétrique, toutes les valeurs propres de u sont réelles.

Théorème 30 (Spectral) Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien réel. Alors:

1) u est diagonalisable

2) Les sous-espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux.

IV - Recherche d'éléments propres

1) Localisation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [1,n]} \in M_n(\mathbb{C})$. On pose
 $\forall i \in [1,n] \quad R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$

[Frac
Alg 2]
p 30

Lemme 31 (Hadamard) Si A est à diagonale strictement dominante, i.e. $\forall i \in [1,n] \quad |a_{ii}| > R_i$, alors $A \in GL_n(\mathbb{C})$

Lemme 32 (Disques de Gershgorin)

On a $S_p(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R_i\}$

Théorème 33 Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est à diagonale strictement dominante, alors

$$\det(A) \geq \prod_{i=1}^n (|a_{ii}| - R_i)$$

DEV 2

2) Rayon spectral

[2] Définition 34. Le rayon spectral de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est le
 réel $p(A) = \max_{\lambda \in \mathcal{S}(A)} |\lambda|$

p 742

Application 35 (du Th spectral) Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\|A\|_2 = p(A)$

Théorème 36 $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\| = \sqrt{\|A^t A\|} = \sqrt{p(A^t A)}$

→ Étude des endomorphismes
avec leur matrice

↳ Dans certaines bases $\exists$ e vecteurs
tels que $f(e) = \lambda e$
 $Ae = \lambda e$

e = vecteur propre
 λ = valeur propre

Ex : sous-espaces propres

153 Valeurs propres, vecteurs propres
Calculs exacts ou approchés d'éléments
propres Applications

Espaces propres

↳ en somme directe

Polynômes annulateurs

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$$P(A) = 0$$

$$\hookrightarrow P(\lambda) = 0$$

difficile de trouver les
racines lorsque $n \geq 5$

↳ limite au calcul exact

χ_A polynôme
caractéristique

Application à la
réduction

$$E = \bigoplus E_{\lambda}$$

diagonalisable → Dunford

trigonalisation

$$\text{tr}(A) = \sum v_p$$

$$\det(A) = \prod v_p$$

Localisation et recherche

rayon spectral
 $\|A\|_2 = \rho(A)$

Disques
de
Gershgorin

lemme Hadamard
DEV2

Cas particuliers

Matrice
nilpotentes

critère de
nilpotence DEV1

Matrices
symétriques

Th spectral
→ base de
vp $\mathbb{R}^n$
→ $\lambda \in \mathbb{R}$