

[Ber]
[Rom]

150: Polynômes d'endomorphismes en dimension finie réduction d'un endomorphisme en dim finie. Applications

K corps algébriquement clos de dim finie n .
 $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $u^k = u \circ \dots \circ u$ k fois

I- Polynômes d'endomorphismes

1) L'algèbre $K[u]$ [Ber] 942 943

def: poly d'un endo

ex: $P(x) = x^4 - x^2 + 2$

$$P(u) = u^4 - u^2 + 2 \text{Id}$$

• Prop: $\Phi_u: K[x] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ morphisme d'algèbre
 $P \mapsto P(u)$

$\text{Im } \Phi_u = K[u]$ ss algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$

• Prop: $\dim K[u]$

• lemme des noyaux

2) Polynômes annulateur et minimal [Rom] 605

• def: poly annulateur

• Prop: existence polynôme annulateur

ex: $u = \text{Id}$ $(x-1)$ annule u

• def nilpotent

• Prop: $I_u = \{P \in K[x] \mid P(u) = 0\}$ idéal de $K[x]$

• def Polynôme minimal

II- Réduction

[Rom] 611

1) Elements propres d'un endomorphisme [Ber] 956

• def vp, poly caractéristique, ss espaces caractéristiques

- Prop $E = \bigoplus N_{\lambda_k}(u)$

exp: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\chi_A = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det A$

- Th $\dim E = n$ $\chi_p \text{ de } u = \text{racines de } \chi_u$
- Th Cayley Hamilton

2) Diagonalisation et Trigonalisation [Rom]

- def diag et trigo 675
- Th et prop sur la diag et trigo 683

III-Applications

1) La décomposition de Dunford [Ber] 968

- Théorème
- exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Exponentielle de matrices [Rom] 761

- définition
- lemme décomposition Dunford $\exp(A)$
- Th

DEV 1

3) Réduction des endomorphismes normaux [Rom] 743

- def endo normaux
- Théorème

DEV 2

150: Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dim finie Applications
Soit K corps commutatif, E un K -ev de dimension finie n et $u \in L(E)$.

I - Polynômes d'endomorphismes

1) L'algèbre $K[u]$

Définition 1: Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K[X]$. On pose $P(u) = a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0 \text{Id}_E \in L(E)$. On l'appelle polynôme d'endomorphisme.

Exemple 2: $P(X) = X^2 - X^2 + 2$ alors $P(u) = u^2 - u^2 + 2 \text{Id}$

lemme 3: L'application $e_u : K[X] \rightarrow L(E)$
 $P \mapsto P(u)$

est un morphisme de K -algèbres

$\text{Im } e_u = K[u]$ est une sous algèbre commutative

$\dim K[u] \leq n^2$

lemme 4: (décomposition des noyaux). Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $K[X]$ premiers entre eux deux à deux. Pour tout $u \in L(E)$ on a $\text{Ker}(P_1 \dots P_r | u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_r(u)$

2) Polynômes annulateurs et minimal

Définition 5: Soit $u \in L(E)$, l'annulateur de u , noté $\text{Ann}(u) = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0\}$. Un élément de $\text{Ann}(u)$ est appelé polynôme annulateur de u .

Proposition 6: $\text{Ann}(u)$ est non nul

Exemple 7: $u = \text{Id}$ alors $(X-1)$ annule u

lemme 8: $\text{Ann}(u)$ est un idéal de $K[X]$.

Exemple 9: $u \in L(E)$ est nilpotent d'indice $q \geq 1$ si $u^q = 0$ annule u mettre après 10

Définition 10: le polynôme π_u est appelé minimal de u et est tel que: π_u est unitaire, $\pi_u(u) = 0$ et $\forall P \in \text{Ann}(u) \quad \pi_u \mid P$.

II - Réduction

1) Elements propres d'un endomorphisme

Définition 11: Soit $u \in L(E)$. On dit que $\lambda \in K$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ .

Si λ est une valeur propre de u , le sous-espace propre E_λ associé est le sous-ev

$E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$

On appelle spectre de u et on note $\text{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u .

Définition 12: le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in M_n(K)$ est le polynôme $\chi_M[X]$ défini par $\chi_M = \det(XI_n - M)$. le polynôme caractéristique de $u \in L(E)$ est celui d'une matrice représentative de u dans une base arbitraire.

On suppose que le polynôme minimal π_u de u est scindé sur $\mathbb{K}$. On a donc $\pi_u(x) = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{\beta_k}$ avec $\beta_k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_k \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et le polynôme caractéristique de u s'écrit $P_u(x) = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k \quad \forall k \in [1, p]$. Une telle situation est assurée pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos.

Définition 13: On appelle sous-espaces caractéristiques de u , les sous-espaces vectoriels $\ker(u - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$ où $k \in [1, p]$.

Théorème 14: Soit $S_p(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et $\forall k \in [1, p], N_k$ est le sous-espace caractéristique associé à λ_k . On a alors:

$$1) E = \bigoplus_{k=1}^p N_k$$

$$2) N_k \text{ est stable par } u \quad \forall k \in [1, p]$$

$$3) \dim N_k = \alpha_k$$

Exemple 15: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, On a $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A)$

Proposition 16: $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u , ssi

$$\chi_u(\lambda) = 0$$

Proposition 17: Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ on a: $1 \leq \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda}) \leq m_{\lambda}$

Théorème 18: (Caley Hamilton): On a $\chi_u(u) = 0$

2) Diagonalisation et Trigonalisation

Définition 19: On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice est diagonale. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Définition 20: On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 21: L'endomorphisme u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Théorème 22: Si $u \in d(E)$ a n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ alors u est diagonalisable.

Remarque 23: On a des résultats similaires pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 24: Les conditions suivantes sont équivalentes:

$$i) u \text{ est diagonalisable} \quad ii) E = \bigoplus_{k=1}^p \ker(u - \lambda_k \text{Id})$$

$$iii) \sum_{k=1}^p \dim(\ker(u - \lambda_k \text{Id})) = n \quad iv) \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et}$$

$$\forall \lambda_k \in \text{Sp}(\mathbb{K}) \quad \alpha_k = \dim E_{\lambda_k} \text{ avec } \alpha_k \text{ la multiplicité de } \lambda_k$$

v) $\exists$ un polynôme annulateur de u scindé à racines simples
vi) π_u est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$

III - Applications

1) La décomposition de Dunford

Théorème 25: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé. Alors, il existe des endomorphismes $(\phi, \eta) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que:

- 1) $u = \phi \circ \eta$
- 2) $\dim \eta = n \cdot d$
- 3) ϕ est diagonalisable et η est nilpotent

De plus, ϕ et η sont des polynômes en u .

Exemple 26: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Exponentielle de matrice

Définition 27: Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit l'exponentielle de A par $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Théorème 28: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A = D + N$ est sa décomposition de Dunford.

Alors la décomposition de Dunford de e^A est

$$e^A = e^D + e^D (e^N - I_n)$$

avec e^D diagonalisable et $e^D (e^N - I_n)$ nilpotente

Théorème 29: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

[DEV 1]

1) A est diagonalisable $\Leftrightarrow e^A$ est diagonalisable

2) $\exp(A) = I_d \Leftrightarrow A$ diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subseteq \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3) Réduction des endomorphismes normaux

Définition 30: Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal s'il est tel que $u^* u = u u^*$

lemme 31: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ stable par u.

Rom
p 761

Rom
p 743

Théorème 32 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée β de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$\text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} D_p & & \\ & R_1 & \\ & & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} D_p \text{ diagonale} \\ \text{d'ordre } p \end{matrix}$$

et $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \quad b_k \neq 0 \text{ et } p+2r=n$

[DEV 2]

→ Calcul de puissances successives

→ résoudre systèmes linéaires

→ Calculer exponentielle de matrices

pour systèmes d'équations linéaires

Complicé donc pour faciliter on s'intéresse aux endo

$$\mathcal{L}(E) \simeq M_n(K)$$

On se ramène à l'étude des matrices

liées aux endos

150 : Polynômes d'endomorphismes

Réduction d'un endomorphisme

en dimension finie. Applications

réduire à une forme normale = diagonalisation

Ex: endo normaux

$$R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & & \\ & R_1 & \\ & & \ddots \\ & & & R_r \end{pmatrix}$$

critères avec polynômes d'endomorphismes.

Plusieurs réductions

trigonalisation
① forte mais efficace

$$\text{Dunford } A = D + N$$

$\hookrightarrow \exp(A) \text{ diag} \Leftrightarrow \text{Adiogo}$
[DEV2]

lemme des noyaux
= fondamental

Comment arriver à cette réduction?

→ décomposer l'EV en somme directe de sous-espaces stables

$\hookrightarrow$ matrice blocs diagonaux

→ polynômes d'endo

$K[x]$ opérateur à partir de μ

$$\hookrightarrow \text{Im } \varphi: P \mapsto P(\mu)$$

lien

étude polynômes annulateurs $\chi_{\mu, \mu}$

racines, vp.