

[Rom] Rouv

[G]

[Gn]

A RÉPARER
PAS OUF

149. Déterminant

I- Construction du déterminant

1) Formes multilinéaires alternées [G] 140 [Rom] 547 548

• def formes n lin alternées, antisymétrique

• familles liées et det

• Gro, RA, p 141 [Gou] • Illustration géom [Gou]

2) Déterminant d'une matrice carrée et d'un endo

Théorème et def du déterminant

[G] 142

Propriétés du déterminant.

[Rom] 551

3) Propriétés analytiques [Rouv]

• le det est polynomiale

• le det est différentiable

DEV 1

• $GL_n(\mathbb{C})$ dense, ouvert et connexe par arcs

• $SL_n(\mathbb{K})$ fermé

II- Méthodes de Calcul

1) Pivot de Gauss [Gn] 106 [G] 142

• opérations sur la matrice

• det matrices triangulaire sup

• Règle de Sarrus

2) Développement par ligne et colonne [G] 142

Minors et cofacteurs

3) Matrices diagonales par blocs

matrice inverse

III - Applications

- 1) En géométrie [G1] 130
 - lien avec le volume (dessin) [G] 143
- 2) Determinant de Vandermonde
- 3) En Algèbre linéaire [G] 172
 - Polynôme caractéristique
 - réduction d'endomorphisme
 - diagonalisation
 - critère de nilpotence par la trace

DEV2

14.9. Determinant. Exemples et applications

Soit K un corps et E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

I - Construction du déterminant

1) Formes multilinéaires alternées

Définition 1: Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des K -ev. Une application

$f: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ est dite p -linéaire si en tout point les

p applications partielles sont linéaires.

Si $E_1 = \dots = E_p = E$ et $F = K$, on parle de forme p -linéaire sur E , dont l'ensemble est noté $\mathcal{L}_p(E, K)$.

Définition 2: Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$. On dit que:

- f est alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.

- f est antisymétrique si l'échange de deux vecteurs dans la suite $(x_1, \dots, x_p)$ donne à f des valeurs opposées.

Remarque 3: f antisymétrique ssi $\forall \sigma \in \mathcal{S}_p, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$ avec $\epsilon(\sigma)$ la signature

Proposition 4: Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$ alternée. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est un système lié, alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Théorème 5: L'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(E, K)$ des formes n -linéaires alternées est de dimension 1 engendré par l'application $\det_B: E^n \rightarrow K$ définie par:

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)} \quad \text{où } x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} e_i \quad \forall i \in [1, n] \quad 543$$

Définition 6: On dit alors que $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant dans la base B du n -uplet de vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Théorème 7: Soit $F = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes: 1) F est liée.

2) Pour toute base B de E , $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$.

3) Il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

2) Déterminant d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

Définition 8: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$. On appelle déterminant de A , noté $\det A$:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \quad 142$$

Remarque 9: On note aussi $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Théorème 10: Le déterminant est une forme n -linéaire alternée. Pour toute forme n -linéaire alternée f , on a $f(A) = f(\text{Id}) \det(A)$.

Définition 11: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E . Le scalaire $\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle déterminant de f noté $\det f$.

Proposition 12: Soient $A, B \in M_n(K)$, $\lambda \in K$ on a:
1) $\det(\text{Id}_n) = 1$ 3) $\det(A^t) = \det A$
2) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ 4) $\det(AB) = \det A \det B$ 551

5) A inversible si $\det A \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

6) Si A et B sont semblables, $\det A = \det B$

Remarque 13: On a des propriétés analogues sur $L(E)$

3) Propriétés analytiques

Proposition 14: Le déterminant est une application polynômiale de classe C^∞

Lemme 15: $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$

Théorème 16: Soit $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ on a: $M \mapsto \det M$ DEV 1

$\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}) \quad D_X \det H = \text{Tr}({}^t \text{Com}(X) H)$ qui est la différentielle du déterminant

II- Méthodes de Calcul

1) Cas simples et pivots de Gauss

Exemple 17: $n=2 \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$n=3 \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' - a'b'c - a''b'c' - a'b'c'' - a''b'c' - a'b'c''$ aussi appelée règle de Sarrus

Propriété 18: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors:

- 1) Si on effectue une permutation $\sigma \in S_n$ sur les colonnes (ou les lignes) de A , $\det A$ est multiplié par $\epsilon(\sigma)$
- 2) Si A est triangulaire, $\det A$ est le produit des éléments diagonaux de A .

3) On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres. (Même chose sur les lignes)

Exemple 19: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = -2(m+1)$

2) Mineurs et cofacteurs

Définition 20: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$

Pour tout (i, j) , on appelle mineur de l'élément a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i ème ligne et la j ème colonne de A . Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle cofacteur de a_{ij} .

Proposition 21: Avec les mêmes notations

1) $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$ (développement par rapport à la j ème colonne)

2) $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ (développement par rapport à la i ème ligne)

Exemple 22: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$

Définition 23: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ des cofacteurs des éléments de A est appelée comatrice de A notée $\text{Com}(A)$

Proposition 24: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $A \text{Com}(A)^T = \text{Com}(A)^T A = \det A \cdot I_n$

Corollaire 25: Si $A \in GL_n(\mathbb{K}) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^T$

Propriété 26: Si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_n(K)$ avec $A \in M_p(K)$
 $B \in M_{n-p}(K)$
 Alors $\det M = \det A \det B$

III- Applications

1) En géométrie

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ un parallélogramme engendré par deux vecteurs v et w de $\mathbb{R}^2$ (voir figure)

Théorème 27: L'aire $\mathcal{A}(v, w)$ du parallélogramme engendré par v et w est: $\mathcal{A}(v, w) = |\det(v, w)|$

2) Déterminant de Vandermonde

Définition/propriété 28: Soit $n \geq 2$ et $\forall a_1, \dots, a_n \in K$

on définit $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & a_2 & a_2^2 & \vdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & a_n & a_n^2 & \vdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Le déterminant de Vandermonde est

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

3) En Algèbre linéaire

Définition 29: Soit $A \in M_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $K[X]$ défini par $\chi_A(X) = \det(A - X I_n)$

Définition 30: Le polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$ est celui de sa matrice dans n'importe quelle base

Proposition 31: λ est valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$ si $\chi_f(\lambda) = 0$

Proposition 32: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_f est scindé sur K et a toutes ses racines simples alors f est diagonalisable

Théorème 33: Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur K

Théorème 34: [DEV2]

Soit $A \in M_n(K)$. A est nilpotente $\Leftrightarrow \text{tr}(A^k) = 0$
 $\forall 0 \leq k \leq n$

Motivations :

- ① aspect pratique
caractérisation simple de
la liberté (famille de vecteurs)
- ② nombreuses app
↳ syst linéaires endomorphismes

outil puissant

149: DETERMINANT Ex et app

matrice

propriétés analytiques
intéressantes

app C^∞ et différentiable

DEV1

Applications

dans $\mathbb{R}^2$ c'est l'aire
d'un parabolo gramme

méthodes
de
calcul

- Pivot de Gauss
- dev ligne / colonne
- blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

det vandermonde
utile avec polynômes

Qu'est-ce que c'est ?

→ App multilinéaire alternée qui
engendre $\det(E, K)$

→ 1er def : $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)}$
pas commode en pratique

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ne dépend pas de la base choisit
donc pratique

↳ prop du det

$$\det(A^T A) = \det A$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

$$\det(AB) = \det A \det B$$

...

Alg linéaire

$$A \text{ nilp} \Leftrightarrow \text{tr}(A^k) = 0 \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

DEV2