

148. Dimension d'un ev (dim finie) Rang. Exemples et applications

I- Bases et dimension finie

1) Familles de vecteurs [Gri] 10-12 13-14

- def génératrice, libre, base + exemples
- def ev dim finie si $\exists$ famille g n  finie
- ex $\mathbb{K}^n$ dim n $\mathbb{R}[x]$ dim infinie
- $\{e_1, \dots, e_n\}$ base $\Leftrightarrow$ $\forall x$ de composition unique Δ important
- prop famille liée, libre

2) Existence de base E ev de dim finie [Gri] 15-16

- Th $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$
- Th de $\mathcal{H}$ famille g n  on peut en extraire une base
- Th base incomplète

3) Théorèmes fondamentaux sur la dimension [Gri]

- Lemme Steinitz 17-18
- Th $\mathcal{H}$ les bases ont le même nb d'éléments : $\dim_{\mathbb{K}} E$
- ex : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ $\{1\}$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ $\{1, i\}$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n+1$ $\{1, x, \dots, x^n\}$
- $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} E \times \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{K}} E$
- cor : $+n$ éléments $\Rightarrow$ liée $\ominus n$ éléments $\Rightarrow$ pas g n 
- Th famille liée g n  à n éléments est une base
- $\dim(E_1 + \dots + E_p)$
- $F \text{ ev} \Rightarrow \dim F \leq \dim E$

4) Somme, somme directe et supplémentaire [Gri] 21-23

- def $E_1 + E_2$
- Th $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow$
- ex $M_n(\mathbb{K})$ $\mathbb{R}^2$

• $\dim(E_1 + E_2) =$

II- Rang

1) Rang d'une application linéaire [Gn] 59-62

- def rang
- Th rang
- $f \text{ surj} \Leftrightarrow f \text{ inj} \Leftrightarrow \text{bijective}$
- Rq: Faux en dim infini $f: P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$ pas injective
- App $E \simeq E^*$ en dim finie

2) Rang d'une matrice [Gn] 80 [G] 128

- def rg famille de vecteurs
- $\text{rg } f = \text{rg } A$
- Rq: si $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ $\text{rg}(A) \leq \min(p, q)$
- $A \text{ inv} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$
- Th $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ $r = \text{rg}(A)$ $A \sim J_r \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$
- Th rg A avec mineur

III- Application [Gn] 254 177 181-185

DEV 1

- Th spectral
- polynôme annulateur
- def μ_A
- diagonalisable
- def normal

DEV 2

- réduction des endomorphismes normaux } [Rom] 743

148: Dimension d'un ev (dimension finie)

Rang. Exemples et applications

On considère K un corps, E un K -ev

I - Bases et dimension finie

1) Familles de vecteurs

Définition 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une famille de vecteurs

$v_1, \dots, v_n$ d'un espace vectoriel E est:

- génératrice si $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} = E$. Tout élément de E est combinaison linéaire des vecteurs v_i .

- libre si $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i \in [1, n]$

les vecteurs sont linéairement indépendants. Si elle n'est pas libre, elle est liée.

- base si elle est libre et génératrice

Exemple 2: dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est libre, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une base; $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ est génératrice mais pas libre donc pas une base

Définition 3: Un espace vectoriel est dit de dimension finie, s'il existe une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie

Exemple 4: K^n est de dimension finie n mais $\mathbb{R}[X]$ de dimension infinie

Proposition 5: Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout $x \in E$ se décompose de façon unique sur les e_i .

Proposition 6: 1) n est libre $\Leftrightarrow n \neq 0$

2) Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice

3) Toute sous famille d'une famille libre est libre

4) Toute famille contenant une famille liée est liée

5) Toute famille $(v_1, \dots, v_p)$ dont l'un des v_i est nul, est liée

2) Existence de bases

Soit E un ev de dimension finie

Théorème 7: On suppose $E \neq \{0\}$. Soit G une famille génératrice et $L \subset G$ une famille libre. Alors il existe

une base telle que $L \subset B \subset G$

Théorème 8: si $E \neq \{0\}$ alors

1) De toute famille génératrice on peut extraire une base

2) (Théorème de la base incomplète) Toute famille libre peut être complétée en une base

3) Théorèmes fondamentaux sur la dimension

Théorème 9: Dans un ev E sur K de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments

Le nombre est appelé dimension de E . sur K et est noté $\dim_K E$. Pour $E = \{0\}$, on pose $\dim E = 0$

Exemple 10: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] = n+1$

Corollaire 11: 1) Dans un ev de dimension n , toute famille ayant plus de n éléments est liée

2) Dans un ev de dimension n , les familles de moins de n éléments ne peuvent pas être génératrices

Théorème 12: Soit E un ev de dimension n . Alors

- Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.

- Toute famille libre ayant n éléments est une base

[Gn]
10 11 12

11

13

14

Proposition 13: Soient $E_1, \dots, E_p$ des ev de dimension finie sur le même corps K . Alors $\dim_K(E_1 \times \dots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim_K E_i$.

Proposition 14: Soit F un s-ev de E . Alors F est de dimension finie et: 1) $\dim_K F \leq \dim_K E$
2) $\dim_K F = \dim_K E \iff F = E$

4) Somme, somme directe et supplémentaires
Soient E_1, E_2 des sous-ev de E

Définition 15: On appelle somme de E_1 et E_2 la sous-espace de E : $E_1 + E_2 = \{x \in E \mid \exists x_1 \in E_1, x_2 \in E_2: x = x_1 + x_2\}$.
La somme est directe, notée $E_1 \oplus E_2$ si la décomposition est unique

E_1 et E_2 sont supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$

Théorème 16: $E = E_1 \oplus E_2 \iff \begin{cases} 1. E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ 2. \dim E = \dim E_1 + \dim E_2 \end{cases}$

Exemple 17: $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(u) \oplus \text{Vect}(v)$ avec u et v deux vecteurs indépendants

Proposition 18: $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$
En particulier $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

II - Rang

1) Rang d'une application linéaire

Soient E et E' des ev sur le même corps K .
 $f: E \rightarrow E'$ une application linéaire.

Définition 19: Le rang de f , noté $\text{rg } f$ est la dimension de l'image de f .

Théorème 20: (du rang) $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f$

Corollaire 21: Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ avec E et E' de dimension finie. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) f injective
- 2) f surjective
- 3) f bijective

Remarque 22: C'est faux en dimension infinie.

$f: \mathbb{P}(\mathbb{R}[X]) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}[X])$ surjective mais pas injective

Application 23: On a un isomorphisme entre E et son bidual E^{**} seulement en dimension finie

2) Rang d'une matrice

Définition 24: Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace engendré par cette famille

• Soit $A \in M_{p,n}(K)$, $A = [a_1, \dots, a_n]$ où ci sont les vecteurs colonnes de A . On appelle rang de la matrice A le rang de la famille de vecteurs colonnes:

$$\text{rg}\{a_1, \dots, a_n\} = \text{rg } A = \dim \text{Vect}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Proposition 25: Soient E et F deux ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient B_1, B_2 deux bases quelconques de E et F et $A = \text{Mat}_{B_1 B_2}(f)$.

$$\text{Alors } \text{rg}(f) = \text{rg}(A)$$

Proposition 26: Pour toute matrice A : $\text{rg } A = \text{rg } A^t$

[Don] 743

Définition 35: Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal s'il est tel que $u^*u = uu^*$

Lemme 36: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal. Si F est un sous-ev de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Théorème 37 [DEV2]

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$\Delta = \begin{pmatrix} D_p & & \\ & \ddots & \\ & & R_r \end{pmatrix} \quad \text{où } D_p \text{ est diagonale d'ordre } p \text{ et}$$

$$R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \quad 1 \leq k \leq r$$

avec $a_k \neq 0$ et $p+2r=n$

Remarque 27: Si $A \in M_{p,q}(K)$, alors $\text{rg } A \leq \inf\{p, q\}$

Proposition 28: Si $A \in M_n(K)$, A inversible ssi $\text{rg } A = n$

Théorème 29: Soit $A \in M_{p,q}(K)$. Si $\text{rg}(A) = r \geq 1$, A est équivalente à la matrice $Sr = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 30: Soit $A \in M_{p,q}(K)$, le rang de A est le plus grand des ordres des matrices carrées inversibles extraites de A .

III-Applications

Théorème 31 (Spectral) [DEV1]

Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Alors: 1) f est diagonalisable
2) les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux

Définition 32: Soit f un endomorphisme de E . Un polynôme $Q(X) \in K[X]$ est dit annulateur de f si $Q(f) = 0$

Définition 33: On appelle polynôme minimal de f , noté μ_f , le polynôme annulateur de f de plus petit degré non constant.

Théorème 34: Un endomorphisme f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples $\Leftrightarrow \mu_f$ est scindé à racines simples

[G] 128

[Gn] 254

177

181 185

Théorie de l'algèbre linéaire
fondamentale en maths
↳ réduction...

Très souvent pour mq
2 ev sont = on montre
une inclusion et une
égalité de dim

Dimension

Avec la dim finie
on peut définir les
bases d'un espace
↳ savoir famille libre et
généralisées
↳ existence ?
De tt famille génératrice on extrait une
base + Th base incomplète

148: Dimension d'un ev (dim finie)
Rang. Exemple et Applications

Rang $f: E \rightarrow E'$

$\text{rg } f = \dim \text{Im } f$

↳ Th rang

↳ f injective $\Leftrightarrow f$ surjective
 $\Leftrightarrow f$ bijective

↳ matrice liée à
l'app linéaire
rg de la matrice

- Nbreux th
- + n elmts $\Rightarrow$ lié
 - - n elmts $\Rightarrow$ pas gén
 - F seu $\Rightarrow \dim F \leq \dim E$

Utile : notion supplémentaire et
somme directe
↳ décomposer dans un espace

