

250 : Transformation de Fourier. Applications.

feffe

2025-2026

Table des matières

1	Transformation de Fourier	1
1.1	Dans $L^1(\mathbb{R})$	1
1.2	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	2
1.3	Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	2
2	Applications	3
2.1	Equations différentielles	3
2.2	Principe d'incertitude	3
2.3	En probabilités	3
3	Développements	3

1 Transformation de Fourier

1.1 Dans $L^1(\mathbb{R})$

[1] : El Amrani Fourier

Définition 1. La transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$.

Lemme 2 (Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1$, alors $\hat{f}$ est bien définie et $|\hat{f}(\xi)| \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} 0$

Notation 3. $C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid |f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0\}$

Proposition 4. La transformation de Fourier sur L^1 , $\mathcal{F} : (L^1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (C_0, \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto \hat{f}$, est linéaire continue de norme 1.

Exemple 5 (Indicatrice, Poisson, Gaussienne). — Si $a < b$, $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[a,b]}) : \xi \mapsto \frac{2 \sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i\frac{a+b}{2}\xi}$ (si $\xi \neq 0$) et $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[a,b]})(0) = b - a$

— $\mathcal{F}(x \mapsto \frac{1}{2} e^{-x}) : \xi \mapsto \frac{1}{1+\xi^2}$

— Si $a > 0$, $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-ax^2}) : \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Remarque 6. $\mathbb{1}_{[a,b]} \in L^1$, mais $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[a,b]}) \notin L^1$.

Notation 7. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on note $\check{f} : x \mapsto f(-x)$ et pour $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a f : x \mapsto f(x - a)$.

Proposition 8. $\forall f \in L^1, \mathcal{F}(\check{f}) = \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$

Corollaire 9. $\forall f \in L^1, f$ paire (resp. impaire) $\implies \mathcal{F}(f)$ paire (resp. impaire)

Proposition 10. $\forall f \in L^1, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(x \mapsto f(\lambda x)) : \xi \mapsto \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}(f)(\frac{\xi}{\lambda})$, et si $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f) : \xi \mapsto e^{-ia\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$, et $\mathcal{F}(x \mapsto e^{iax} f(x)) : \xi \mapsto \tau_a(\mathcal{F}(f))(\xi)$.

Proposition 11. $\forall f, g \in L^1, f \hat{*} g = \hat{f} \hat{g}$

Application 12. $*$ n'a pas d'élément neutre dans L^1

Proposition 13 (Formule de dualité). $\forall f, g \in L^1, \int_{\mathbb{R}} f \hat{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g$

Théorème 14 (Formule d'inversion). Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$, alors $\hat{\hat{f}} = 2\pi \check{f}$, i.e. $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ p.p. En particulier, $\mathcal{F}$ est injectif.

Exemple 15. Si $a > 0$, alors $\mathcal{F}(x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}) : \xi \mapsto \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$

Corollaire 16. Si $f, \hat{f}, g \in L^1$, alors $fg \in L^1$ et $\hat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$.

1.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Proposition 17. Soit $f \in C^1$ tq $f, f' \in L^1$. Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}'(\xi) = -i\xi \hat{f}(\xi)$. En particulier, $|\hat{f}(\xi)| = o_{|\xi| \rightarrow +\infty}(1/|\xi|)$.

Corollaire 18. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons f k fois dérivable et $f, f', \dots, f^{(k)} \in L^1$. Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}^{(k)}(\xi) = (-i\xi)^k \hat{f}(\xi)$, et $|\hat{f}(\xi)| = o_{|\xi| \rightarrow +\infty}(1/|\xi|^k)$.

Proposition 19. Soit $f \in L^1$ tq $x \mapsto xf(x) \in L^1$. Alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$, et $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}(x \mapsto -ixf(x))(\xi)$.

Corollaire 20. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $f \in L^1$ tq $x \mapsto xf(x), \dots, x \mapsto |x|^k f(x) \in L^1$. Alors $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R})$, et $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}(x \mapsto (-ix)^k f(x))(\xi)$

Définition 21. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est à décroissance rapide si $\forall \alpha \in \mathbb{N}, |x|^\alpha |f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$

Exemple 22. $x \mapsto e^{-|x|} \sin(x)$ est à décroissance rapide.

Définition 23. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ tq f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

Remarque 24. $C_c^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\forall p \in [1, +\infty], \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

Proposition 25. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un ev stable par dérivation, par multiplication par un polynôme et par produit.

Proposition 26. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par $\mathcal{F}$.

Définition 27. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tend vers $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\alpha |f_n^{(\beta)}(x) - f^{(\beta)}(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque 28. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 29. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est linéaire bijective et bicontinue. On a $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.

1.3 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 30 (Formule de Plancherel-Parseval). $\forall f \in L^1, \|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.

Exemple 31. $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \pi$

Théorème 32. Soit $f \in L^2$. Alors $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^1 \cap L^2)^{\mathbb{N}}, f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} f$, et $\exists \tilde{f} \in L^2, \hat{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} \tilde{f}$. La fonction $\tilde{f}$ ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 33. La limite $\tilde{f}$ est la transformée de Fourier de f dans L^2 .

Proposition 34. Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} = \tilde{f}$ (p.p.).

Remarque 35. On dispose donc de $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow C_0$ et $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ qui coïncident sur $L^1 \cap L^2$. On notera sans distinction $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Proposition 36. Soit $f, g \in L^2$, alors $\hat{fg}$ et $\hat{f}\hat{g} \in L^1$, et $\int_{\mathbb{R}} \hat{fg} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\hat{g}$.

Théorème 37 (Formule d'inversion). $\mathcal{P} : L^2 \rightarrow L^2, f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f)$ est une isométrie bijective d'inverse $\mathcal{P}^{-1} : f \mapsto \mathcal{P}(\check{f})$.

2 Applications

2.1 Equations différentielles

Proposition 38 (Equation de Laplace). *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors $u'' - u = \varphi$ admet une unique solution $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. C'est $u : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\xi \mapsto \frac{-\hat{\varphi}(\xi)}{1+\xi^2})(-x)$.*

Théorème 39 (Equation de la chaleur). *Soit $f \in L^1$, alors il existe un unique $u \in C_t^1 \cap C_x^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ tq :*

- $\partial_t u = \partial_x^2 u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
- $\|u(t, \cdot) - f\|_1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

De plus, $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^ \times \mathbb{R})$.*

[4] : Rauch

Définition 40. $u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et :

- $\forall t \in \mathbb{R}, u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \forall t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t, u(t_n, \cdot) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R})} u(t, \cdot)$

Définition 41. Si $k \in \mathbb{N}$, alors $u \in C^k(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ si $u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, $\partial_t u, \dots, \partial_t^k u$ existent et sont dans $C(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. On dit que $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ si $u \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

Théorème 42 (Equation de Schrödinger). [DEV] Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors l'équation $\partial_t u = i\partial_x^2 u$ avec pour condition initiale $u(0, \cdot) = f$ admet une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. C'est $u : (t, x) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi^2} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$.

Exemple 43. Si $f : x \mapsto e^{-ax^2/2}$ avec $a > 0$, alors $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{ita+1/2}} e^{-\frac{ax^2}{2(ita+1/2)}}$

2.2 Principe d'incertitude

Proposition 44. Soit $f \in L^1$ à support compact tq $\hat{f}$ est à support compact. Alors $f = 0$.

Théorème 45 (Principe d'incertitude suédois). [DEV] Soit $f \in L^1$, notons $A_f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ et $B_f := \{\xi \in \mathbb{R} \mid \hat{f}(\xi) \neq 0\}$. Supposons que $\text{Leb}(A_f) < +\infty$ et $\text{Leb}(B_f) < +\infty$, alors $f = 0$.

Théorème 46 (Principe d'incertitude de Heisenberg). $\forall f \in L^2, \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{4} \|f\|_2^4$

2.3 En probabilités

[2] : Chabanol

Définition 47. Soit X une v.a.r. Sa fonction caractéristique est $\varphi_X : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}[e^{i\xi X}]$.

Remarque 48. Si X est à densité f , alors $\varphi_X = \hat{f}$.

Exemple 49. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\varphi_X : \xi \mapsto e^{i\mu\xi - \sigma^2 \xi^2/2}$.

Théorème 50. La fonction caractéristique caractérise la loi.

Exemple 51. Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Théorème 52 (Lévy). Soit $X, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a.r. Alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ ssi $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} \varphi_X$.

Application 53 (TCL). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de v.a. i.i.d., tous de carré intégrable. Notons $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. Alors $\sqrt{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

3 Développements

- Principe d'incertitude suédois, [3]
- Equation de Schrödinger, [4]

Références

- [1] Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. ellipses, 2008.
- [2] Marie-Line Chabanol et Jean-Jacques Ruch. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. ellipses, 2016.
- [3] Julien Bernis et Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 2e édition augmentée*. ellipses, 2024.
- [4] Jeffrey Rauch. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1991.