

[Rom]
[G]
[Man]

159 Formes linéaires et dualités en dimension finie Exemples et applications

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n
 $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

I - Dual d'un espace vectoriel

1) Formes linéaires et espace dual [Rom] 441

- def + exemple f , $P \mapsto P(a)$, f est coordonnée, $\langle \cdot, \cdot \rangle$

2) Base duale [Rom] 442-443

- def E^*
- Th + corol $\dim E = \dim E^*$
- def e_i^*
- antédualité

3) Bidual [Rom] 445

- def E^{**}
- Th Bidual isomorphisme E et E^{**}

II - Orthogonalité

1) Définition - Caractérisation [Rom] 446-447

- def $\varphi \perp x$
- def $A^\perp = B^\circ$
- prop $A^\perp$ sev $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$
- $A \subset A^\perp$ $B \subset B^\perp \Rightarrow B^{\circ\circ} \subset B$
- $A \subset (A^\perp)^\circ$ $B \subset (B^\circ)^\perp$

2) Hyperplan [Rom] 445-446

- def
- H hyperplan $\Leftrightarrow H = \ker \varphi$

Dev 1a)

- Th $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
- $G^\perp = \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } \varphi_i$
- F sev alors $\exists (\varphi_i) \quad F = \bigcap \text{Ker } \varphi_i$
- Th système linéaire

3) Transposition [Rom] 452

DEV 1b)

- def ${}^t f$
- F stable par $f \Leftrightarrow F^\perp$ stable par f
- $\text{Mat}({}^t f)_{B^*} = {}^t \text{Mat}(f)_B + \hat{n} \text{ rg}$

III Applications

1) Cotriagonalisation [Man]

DEV 1c)

- def
- lemme : existence vecteur propre
- Th

2) Nilpotence par une forme linéaire [G] 128

DEV 2

- def trace
- prop
- Nilpotence par la trace

159: Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

Soit E un EV sur un corps K , E de dimension n .
 $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

I - Dual d'un espace vectoriel

1) Formes linéaires et espace dual

Définition 1: Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K .

Exemples 2: $\text{tr} : M_n(K) \rightarrow K$ $\times \varphi : K[x] \rightarrow K$
 $M \mapsto \text{tr}(M)$ $P \mapsto P(0)$

$\varphi_j : E \rightarrow K$ $\times \forall i \in [1, n]$ $p_i : E \rightarrow K$
 $x \mapsto \langle x, y \rangle$ $x = \sum_{j=1}^n a_j e_j \mapsto a_i$
 $y \in E$ Fonction coordonnées dans B

Définition 3: On note E^* , l'ensemble $\mathcal{L}(E, K)$, appelé espace dual de E

Proposition 4: $(E^*, +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel de dimension n et de base $B^* = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$

2) Base duale

Définition 5: $\forall i \in [1, n]$, on note $e_i^* = p_i$ et $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de $(e_1, \dots, e_n) = B$

Elle est caractérisée par:

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Proposition 6: $\forall \varphi \in E^*$ $\exists! (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ tels que
 $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*$ et $\forall i$ $a_i = \varphi(e_i)$

Proposition 7: Soit B^* une base de E^* , il existe une base B de E telle que B^* soit la base duale de B . B est la base antéduale de B^*

3) Bidual

Définition 8: Le bidual de E est le dual de E^* ,

soit $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, K)$

Théorème 9: L'application $\Theta : E \rightarrow E^{**}$ qui associe à tout vecteur $x \in E$, la forme linéaire $\Theta(x)$ définie sur E^* par: $\forall \varphi \in E^*$, $\Theta(x)(\varphi) = \varphi(x)$ est linéaire et injective.

Dans le cas où E est de dimension finie, E et E^{**} sont de même dimension et Θ est un isomorphisme.

II - Orthogonalité

1) Définition - caractérisation

Définition 10: On dit qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ et un vecteur $x \in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x) = 0$

Définition 11: L'orthogonal dans E^* d'une partie non vide X de E est l'ensemble:

$$X^\perp = \{ \varphi \in E^* \mid \forall x \in X, \varphi(x) = 0 \}$$

L'orthogonal dans E d'une partie non vide Y de E^* est l'ensemble: $Y^\circ = \{ x \in E \mid \forall \varphi \in Y, \varphi(x) = 0 \}$

Remarque 12: $X^\perp$ est un sev de E^* et Y^0 est un sev de E

Proposition 13: Soient $A, B \in E$ et $u, v \in E^*$

1) Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$

2) Si $u \subset v$ alors $v^0 \subset u^0$

3) $A \subset (A^\perp)^\perp$

4) $u \subset (u^0)^\perp$

5) $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$

6) $u^0 = (\text{Vect}(u))^\perp$

7) $(u^\perp)^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0\}$, $(u^0)^\perp = E$ et $(E^*)^\perp = \{0\}$

2) Hyperplan

Définition 14: On appelle hyperplan de E , le noyau d'une forme linéaire non nulle de E

Remarque 15: Si $H = \ker(\varphi)$ est un hyperplan de E , on dit alors que φ est une équation de H

Théorème 16: Un hyperplan de E est un sous-espace de E supplémentaire à une droite.

Proposition 17: $H \subset E$ est un hyperplan ssi $\exists \varphi \in E^*$ $\varphi \neq 0$ tel que $H = \ker \varphi$.

Deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si, et seulement si, elles sont liées

Théorème 18: Soit F sev de E , alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

448

Proposition 19: Soit G sev de E^* . Si $G = \text{Vect}(p_1, \dots, p_r)$ alors $G^\perp = \bigcap_{i=1}^r \ker p_i$

Corollaire 20: Soit F sev de E , alors il existe $(p_1, \dots, p_r) \in E^*$ tel que $F = \bigcap_{i=1}^r \ker p_i$ et $r = \dim E - \dim F$

3) Transposition

Soient E, F des K -ev

Définition 21: La transposée de l'application linéaire $u \in L(E, F)$ est l'application t_u de F^* dans E^* définie par: $\forall \varphi \in F^*$, $t_u(\varphi) = \varphi \circ u$ $t_u \in L(E, F)$

Théorème 22: L'application de transposition $u \mapsto t_u$ est linéaire et injective de $L(E, F)$ dans $L(F^*, E^*)$

Théorème 23: Soit $F \subset E$. F est un sous-espace stable par $g \in L(E)$ ssi $F^\perp$ stable par g^t

Théorème 24: Soient $u \in L(E, F)$, $v \in L(F, G)$. On a: 1) $t(v \circ u) = t_v \circ t_u$

2) pour $F = E$ $t_{Id_E} = Id_{E^*}$

3) Si u est un isomorphisme de E sur F alors t_u est un isomorphisme de F^* sur E^* et $(t_u)^{-1} = t_{u^{-1}}$

4) $\ker t_u = (\text{Im } u)^\perp$ $\text{Im}(t_u) = \ker(u^\perp)^\perp$

Théorème 25: Si $A \in M_{m,n}(K)$ est la matrice de $u \in L(E, F)$ dans les bases B et B' alors la matrice de t_u dans les bases B'^* et B^* est la transposée tA .

445

452

448

III- Applications 1) Cotrigonalisation

Définition 26: Soit I un ensemble ayant au moins deux éléments et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E . On dit qu'une base B de E est une base commune de trigonalisation pour la famille $(u_i)_{i \in I}$ si la matrice T_i de chaque endomorphisme u_i dans cette base est triangulaire.

C'est à dire la famille $(u_i)_{i \in I}$ est cotrigonalisable.

Théorème 27: Soit E un K -ev de dimension finie n .

On considère une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes de E commutant 2 à 2 et trigonalisables.

On peut alors les trigonaliser dans une même base

DEV 1

2) Nilpotence par une forme linéaire

Définition 28: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$. On appelle trace de A le scalaire $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

L'application $A \mapsto \text{tr } A$ est une forme linéaire

Définition 29: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. on dit que f est nilpotent si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

une matrice $A \in M_n(K)$ est nilpotente si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$

Théorème 30: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

DEV 2

Nilpotente $\Leftrightarrow \text{tr}(A^k) = 0 \quad \forall k \in [0, n]$

Objectif: introduire des

résultats sur les formes

linéaires et espaces duaux

qui facilitent certains

domaines

159: Formes linéaires et

duauté en dim finie: ex
et app

Applications

conjugaison

nilpotence par une forme linéaire

$A \text{ nilp} \Leftrightarrow \text{tr}(A^k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, n$

[DEV 2]

Nbreuses formes linéaires

$\text{tr}(M)$ produit scalaire ...

$E^* \cong \mathcal{L}(E, K)$ espace dual $\rightarrow$ base par rapport à celle de E

K -ev de $\dim n = \dim E$

$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

$\rightarrow \{ \text{base } B \text{ de } E^* = \text{base antéduale} \}$

bidual $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, K)$

on obtient $E \cong E^{**}$

$\rightarrow$ notion d'app transposée

lier images et noyaux des app

+ résultats remarquables sur les

ss espaces stables

utile en géométrie

$\rightarrow$ hyperplan et vecteurs $\perp$

$\hookrightarrow \forall v \in V$

φ app lin

$\hookrightarrow$ orthogonal d'un ensemble

$\hookrightarrow \dim F + \dim F^\perp = \dim E$ dans E et dans E^*