

158 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dim finie)

I - Espace Euclidien

1) Généralités [Rom] 713 715

- def esp euclidien, produit scalaire
- Cauchy-Schwarz
- orthogonalité famille orthogonale / orthonormale
- Gram-Schmidt

2) Adjoint [Rom] 718 719

- def, matrice, propriétés

II - Endomorphismes normaux [Rom] 743

- définitions et propriétés
- Réduction des endomorphismes normaux

DEV 1

III - Endomorphismes symétriques

1) Def + prop [Rom] 732

2) Réduction [Man] 125 [Gr] 254

- Th spectral

DEV 2

3) Application

- Homomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})^{++}$ [CalH] 351 355

DEV 3

IV - Endomorphismes orthogonaux

1) Def et prop [Rom] 720 - 723 [Gr] 743

isométries mat orthogonale, projection orthogonale
réflexion

2) Réduction [Man] 122-123 [Rom] 727

158: Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dim finie)

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 1$

I- Espaces euclidiens

1) Généralités

Définition 1: Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 2: Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Dans la suite E est un espace euclidien.

Théorème 3: (inégalité de Cauchy-Schwarz) $\forall x, y \in E$ on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Il y a égalitéssi x et y sont liés

Définition 4: On dit que deux vecteurs x et y dans E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$

Théorème 5: Les vecteurs x et y sont orthogonaux dans E ssi $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

Définition 6: On appelle famille orthogonale dans E toute famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E telle que $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \forall i \neq j$ dans I . Si de plus $\|e_i\| = 1 \forall i \in I$, la famille est orthonormée.

Théorème 7 (orthonormalisation de Gram-Schmidt) A toute base de E on peut associer une base orthonormée (BON) de E

[Bom]
713

715

2) Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 8: (de représentation de Riesz) $\forall x \in E^*, \exists ! a \in E$, tel que $\ell(x) = \langle x, a \rangle \forall x \in E$

Théorème 9: $\forall u \in L(E), \exists ! u^* \in L(E)$ tel que

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$$

Définition 10: On dit alors que u^* est l'adjoint de u

Proposition 11: Soit B une BON de E . Si $A = \text{Mat}_B(u)$ et $A^* = \text{Mat}_B(u^*)$ alors $A^* = {}^t A$.

Ainsi $\det u^* = \det u$

Proposition 12: Soit $u, v \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$1) (\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$$

$$2) (u^*)^* = u$$

$$3) (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

$$4) \text{Si } u \in GL(E), u^* \in GL(E) \text{ et } (u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$$

$$5) \ker(u^*) = (\text{Im}(u))^{\perp}$$

$$\text{Im}(u^*) = (\ker u)^{\perp}$$

7) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u^* .

II- Endomorphismes normaux

Définition 13: Un endomorphisme $u \in L(E)$ est dit normal s'il est tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$

Lemme 14: Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme normal. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^{\perp}$ est stable par u .

Théorème 14: Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle

713

la matrice de u s'écrit:

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} D_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_1 & \dots & R_r \end{pmatrix}$$

D_p diagonale d'ordre p

$$\text{Or } R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \quad b_k \neq 0 \text{ et } p+2r=n$$

DEV1

III-Endomorphismes orthogonaux

1) Définitions et propriétés

Définition 15: Une isométrie de E est une application

$u: E \rightarrow E$ qui conserve le produit scalaire, c-à-d

tel que $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E appelé groupe orthogonal.

Exemple 16: Les seules isométries qui sont des isométries sont id et $-\text{id}$

Proposition 17: Une application $u: E \rightarrow E$ est une isométrie ssi elle est linéaire et conserve la norme

Théorème 18: Une isométrie est un automorphisme de E et $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$

Proposition 19: Soit $u \in O(E)$ et B une BON de E .

Soit A la matrice de u dans B . On a équivalence entre

1) u est une isométrie

2) u transforme B en une BON de E

3) $A^t A = {}^t A A = I_n$

Définition 20: On appelle matrice orthogonale, une matrice réelle A telle que ${}^t A A = A^t A = I_n$

Corollaire 21: $\forall u \in O(E), \det(u) = \pm 1$

Définition 22: On note $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}), \det(A) = 1\}$ qui est appelé groupe spécial orthogonal

2) Réduction

Proposition 23: Les valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal sont de module 1. En particulier, les valeurs propres réelles appartenant à $\{\pm 1\}$

Lemme 24: Soit $u \in O(E)$ avec $\dim E = 2$. Alors la matrice de u dans une BON est de la forme:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Lemme 24: Soit $u \in O(E)$ où $\dim E \geq 2$ avec u sans valeurs propres réelles. Alors il existe un plan stable par u .

Proposition 25: Soit $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . Si F stable par u alors $F^\perp$ est stable par u .

Théorème 26: Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une BON B de E dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$D = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & R_1 \dots R_r \end{pmatrix} \text{ où } \forall k \in \{1, \dots, r\} \quad R_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$$

avec $\theta_k \in]0, \pi[$ et $p+q+2r=n$

IV-Endomorphismes symétriques

1) Définitions et propriétés

On note $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^t A = A\}$

Définition 27: $u \in L(E)$ est dit symétrique ou autoadjoint si $u^t = u$, c-à-d $\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques

723

721

123

[Rom]

727

732

Théorème 28: $M \in L(E)$ est symétrique ssi sa matrice dans une BON de E est symétrique

Corollaire 29: $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

2) Réduction

Lemme 30: Soit $u \in S(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Théorème 31: (Spectral) DEV2

Soit g un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Alors

1) g est diagonalisable

2) les sous-espaces propres de g sont 2 à 2 orthogonaux. En particulier, on peut construire une BON de vecteurs propres

Théorème 32: (Spectral)

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$D = {}^t P S P$ diagonale

3) Application

Théorème 33: exp: $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme

DEV3

endo = cœur de bien des domaines

↳ on se place dans un espace euclidien pour cette étude

ie ev réel muni d'un produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$$

↳ CS

↳ identité du parallélogramme

↳ Gram Schmidt

Construction explicite d'une BON
facilite les manipulations

Quand on étudie des endo, on s'intéresse à l'adjoint qui permettent de définir plusieurs classes d'endo remarquables

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$$

↳ nombreuses propriétés

158: Endomorphismes remarquables d'un ev (dim finie)

1er Type: normaux

$$u^* u = u u^*$$

Th de réduction BON

[DEV 1]

$$\rightarrow {}^t A A = A {}^t A$$

2e type: orthogonaux

$$u u^* = u^* u = \text{id}$$

= isométries

$$\rightarrow {}^t A A = A {}^t A = I_n$$

Réduction dans une BON

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$$

3e type: Symétriques

$$u^* = u \rightarrow {}^t A = A$$

Réduction: Th Spectral

Central Car on voit direct si une matrice est diag

[DEV 2]

→ homéo

$$\text{exp: } S_n \rightarrow S_n^{++}$$