

[Man]
[Gi]
[Rom]

152: Endomorphismes diagonalisables en dim finie

I- Endomorphismes diagonalisables

1) Elements propres [Man] 51-53

- def: v.p, vecteurs propres, ss espaces propres
- $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe

2) Definition diagonalisation [Man] 89

- def diago
- f diago $\Leftrightarrow \exists$ base de vecteurs propres de E

3) Polynômes annulateurs [Gi] 177-181

- def
- lemme des royaux

4) Polynômes caractéristique [Man] 54

- def $p_f: \lambda \mapsto \det(\lambda I - f)$
- 2 matrices semblables ont le m^{me} χ
- λ v.p ssi $\chi(\lambda) = 0$
- Caley Hamilton [Gi] 178

II- Critères de diagonalisabilité [Man] 90-93

- Th: équivalences de diagonalisabilité
- χ scindé à racines simples $\Rightarrow$ diago
- F stable par χ diago $\Rightarrow$ χ diago

III- Endomorphismes remarquables diagonalisables

1) Endomorphismes symétriques [Man] 124-126

- def
- Th: T endo symétrique se diagonalise dans une base symétrique.

[Rom] 743
ou [Man] 128-129

2) Réduction des endomorphismes normaux

DEV 1

- def
- Th.

IV- Applications

1) Décomposition de Dunford [Man] 141

2) Exponentielle de Matrices [Rom] 761

DEV 2

152: Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Soit K un corps. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$

I - Endomorphismes diagonalisables

1) Elements propres

Définition 1: Une valeur propre λ de u est un scalaire tel que $u - \lambda Id_E$ n'est pas injective, c'est-à-dire tel qu'il existe $x \in E$ non nul qui satisfait $u(x) = \lambda x$.

L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u , noté $Sp(u)$.

Un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ est un vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id_E)$. Sa dimension est notée $mg(\lambda)$.

Proposition 2: Les sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Remarque 3: Les sous-espaces propres sont stables par u .

2) Définition diagonalisation

Définition 4: u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice est diagonalisable ssi elle est semblable

[Han] 51

à une matrice diagonale.

u est diagonalisable ssi il existe une base de vecteurs propres de u .

3) Polynômes annulateurs

Définition 5: Un polynôme $Q(X) \in K[X]$ est dit annulateur de u si $Q(u) = 0$

Proposition 6: Soit $Q(X)$ un polynôme annulateur de u . Alors les valeurs propres de u sont des racines de Q : $Sp(u) \subset \text{Rac}(Q)$

Lemme 7: (Des noyaux) Soit $u \in L(E)$ et

$P(X) = P_1(X) \dots P_p(X)$ un polynôme factorisé en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux.

Si $P(u) = 0$ alors: $E = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_p(u)$

4) Polynômes caractéristiques

Définition 8: Le polynôme caractéristique de $u \in M_n(K)$ est le polynôme unitaire χ_A de degré n défini par

$$\chi_A = \det(XI_n - A)$$

Corollaire 9: Les polynômes caractéristiques de deux matrices semblables sont égaux.

Définition 10: Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de n'importe laquelle de ses matrices

Proposition 11: Les racines de χ_u sont exactement les valeurs propres de u .

[Han] 54

[Gn] 177-178

181

[G1] 178 Théorème 12: (Caley Hamilton) on a $\chi_u(u) = 0$

II - Critères de diagonalisation

[H1] 90 Proposition 13: Soit $u \in L(E)$ avec $\dim E = n$. Si u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable.

Corollaire 14: Si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable.

Théorème 15: Soit $u \in L(E)$. on a équivalence entre:

- 1) u est diagonalisable
- 2) u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- 3) Son polynôme minimal μ_u est scindé à racines simples
- 4) χ_u est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre dans χ_u .

Proposition 16: Soit F un sous-espace stable par u . Alors si $u|_F$ est diagonalisable, $u|_{F^\perp}$ est diagonalisable

III - Endomorphismes remarquables diagonalisables

1) Endomorphismes Symétriques

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien de dimension n

Définition 17: $u \in L(E)$ est symétrique ou autoadjoint si $u = u^*$, c'est à dire $\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

Proposition 18: u est symétrique si et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Lemme 19: Soit u symétrique et F un sous-espace vectoriel stable par u . Alors $F^\perp$ est stable par u .

Proposition 20: Soit u symétrique. Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles.

Proposition 21: Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 22 (Spectral) Un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in O(n, \mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $S = {}^t O \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) O$.

Remarque 23: Ce n'est plus vrai pour des matrices symétriques complexes

2) Endomorphismes normaux

Définition 24: $u \in L(E)$ est normal si $u u^* = u^* u$

Lemme 25: Soit $u \in L(E)$ normal et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors $F^\perp$ est stable par u .

Théorème 26: Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} D^p & & \\ & R_1 & \\ & & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} D^p \text{ diagonale} \\ \text{d'ordre } p \end{matrix}$$

$$\text{et } R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \quad b_k \neq 0 \text{ et } p+2r=n$$

DEV1

IV- Applications

1) Décomposition de Dunford

Théorème 27: Soit $u \in L(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que:

- $u = n + d$
- $n d = d n$
- n nilpotente
- d diagonalisable

De plus, les endomorphismes d et n sont des polynômes en u .

2) Exponentielle de Matrices

Définition 28: Pour $A \in M_n(K)$, on définit l'exponentielle de A par $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Théorème 29: Soit $A \in M_n(K)$ telle que $A = D + N$ est sa décomposition de Dunford.

Alors sa décomposition de Dunford de e^A est

$$e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$$

avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotente

Man] 141

Rem] 761

Théorème 30: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

- 1) A est diagonalisable $\Leftrightarrow e^A$ est diagonalisable
- 2) $\exp(A) = I_d$ $\Leftrightarrow A$ est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subseteq \{i\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

DEV2

$$L(E) \simeq M_n(K)$$

donc on peut faire
le lien entre endomorphisme
et sa matrice

lien avec les vp et $\vec{v}^p$

$$A = P D P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ être diagonalisable

$\Leftrightarrow$

$\exists$ base de vecteurs propres

152 : Endomorphismes
diagonalisables en
dimension finie

critères : on s'intéresse

aux polynômes annulateurs

$\hookrightarrow$ nombreux critères

Quels endomorphismes sont
diagonalisables ?

$\rightarrow$ Symétriques

Th Spectral

hyper rapide
+ BON

$\rightarrow$ Normaux

DEV 1

PQ diagonaliser ?

$\rightarrow$ Calculer puissances
de matrices $A^k = P D^k P^{-1}$

$\hookrightarrow$ systèmes linéaires

$\hookrightarrow$ exponentielle

$\hookrightarrow$ étudier A^k

$\hookrightarrow$ Dunford

$\hookrightarrow$ exp A diag $\Leftrightarrow$ A diag

DEV 2