

[Man]
[OA]
[lom]

151. Sous-Espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un ev de dim finie. Applications

Soit K un corps commutatif, E un K -ev de dim $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sev de E

I- Notion de sous-espaces stables

1) Introduction [Man] 17

- def + ex $\ker u$ et $\operatorname{im}(u)$
- F stable par u + ver $u|_F$
- $\operatorname{Mat}_B(u) = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ $A = \operatorname{Mat}_{B_F}(u|_F)$ [OA] 158

2) Notion d'endomorphisme induit [Man] 17 18 55 93

- def
- $\chi_{u_F} | \chi_u$ $\pi_{u_F} | \pi_u$
- u_F diag / trigo si u trigo
- $E = F \oplus G$ $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$ $\pi_u = \pi_{u_F} \pi_{u_G}$

3) Recherche de sous-espaces stables [OA] 159 [Man]

- les sous-espaces propres et caractéristique sont stables par u
- F stable par u ssi $F^\perp$ stable par u^*
- lemme des royaux
- Cayley-Hamilton

II- Applications à la réduction d'endomorphismes

1) Diagonalisation [Man] 89-93

- def
- équivalence

2) Trigonalisation [Man] 105

• def et H-équivalence

3) Co-diago et Cohigo [Man] 84-107

• Th.

4) Décomposition de Dunford [Man] 141-142

• Th + exemple

[Rom] 765

• décomposition de Dunford de l'exponentielle

• A diago $\Leftrightarrow e^A$ diago

DEV1

III - Endomorphismes remarquables

1) Endomorphismes cycliques [CoA] 175-177

• def

• def matrice compagnon

• équivalence

• α cyclique diago ssi n vp distinctes

2) Endomorphismes normaux [Rom] 743-746

• def + ex

• F sev stable par $\alpha \Rightarrow F^\perp$ stable par α

• Th réduction

• Th spectral (corollaire)

DEV2

2) Triagonalisation

105 Définition 15: un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Théorème 16: les assertions suivantes sont équivalentes:
1) u est trigonalisable

2) u admet un polynôme annulateur scindé
3) Tu est scindé

3) Co-diagonalisation et co-trigonalisation.

94 Théorème 17: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux.
Si tous les u_i sont diagonalisables (resp trigonalisables), alors il existe une base de E qui diagonalise (resp trigonalise) simultanément tous les $u_i, i \in I$.

4) Décomposition de Dunford

141 Théorème 18: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que Tu est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que

- 1) $u = d + n$
- 2) d et n commutent
- 3) n est nilpotent et d diagonalisable.

De plus d et n sont des polynômes en u .

Exemple 19: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$

175 Théorème 20: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A = D + N$ soit la décomposition de Dunford.

Alors la décomposition de Dunford de A^p est $A^p = e^D + e^D (e^N - I_n)$

avec e^D diagonalisable et $e^D (e^N - I_n)$ nilpotente

Théorème 21: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

- 1) A diagonalisable $\Leftrightarrow e^A$ est diagonalisable
- 2) $\exp(A) = I_d \Leftrightarrow A$ diagonalisable et $\exists p(A) \in \{i\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

III - Endomorphismes remarquables

1) Endomorphismes cycliques

Définition 23: On dit que u est cyclique s'il existe

$x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E

Définition 24: Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$. La matrice compagnon associée à P est:

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad K_C = P$$

Proposition 25: des propositions suivantes sont équivalentes

- 1) u est cyclique
- 2) $(-1)^n K_u = Tu$
- 3) Tu est de degré n
- 4) $\exists$ base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon
- 5) $\dim(\mathbb{K}[u]) = n$

137 Proposition 26: u est cyclique et diagonalisable si, et seulement si, il admet n valeurs propres distinctes

2) Endomorphismes normaux

[Rom] Définition 27: $u \in L(E)$ est dit normal s'il est tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$

743

Exemple 28: les endomorphismes suivants sont normaux: symétriques, anti-symétrique, orthogonal.

lemme 29: Soit $u \in L(E)$ normal. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Théorème 30: Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{matrix} \quad \begin{matrix} D \text{ diagonale} \\ \text{d'ordre } p \end{matrix}$$

$$\text{et } R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \quad b_k \neq 0 \quad \text{et } p+2r=n$$

DEV2

Corollaire 31: (Théorème spectral): Un endomorphisme symétrique a toutes ses valeurs propres réelles et se diagonalise dans une base orthonormée

746

Intérêts : description + simple
d'un endomorphisme car on
se ramène à étudier les
endomorphismes induits sur les
sous espaces

Exemple ?

$$\mu(F) \subseteq F$$

ex ker μ et Im μ

$$\text{Mat}_B(\mu) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$A = \text{Mat}_{B_F} \mu|_F$
 $\mu_F(x) = \mu(x) \quad \forall x \in F$
 $\neq \mu|_{F^\perp}$ Δ

endomorphisme
induit

restriction

→ mène à la
réduction

151 : Sous-espaces stables par
un endomorphisme ou famille
d'endomorphismes d'un E de dim
finie. Applications

① Diagonalisation

② Trigonalisation

③ Cadégonalisation et
Catrigonalisation

④ Dunford

→ facilite le
calcul de puissances
et d'exponentielle de
matrice

→ A diagonalisable

$\Leftrightarrow$

A diagonalisable

DEV 1

Cycliques

existence d'un
vecteur dont le
ss espace local
engendre E

Endomorphismes
Remarquables

Normaux

Réduction BON

DEV 2

recherche

Sous-espaces
propres et
caractéristiques

→ permet d'ordonner
des récurrents en
abaissant la dimension

Lemme des noyaux

central car on décompose
 E en somme de ss
espaces stables