

[Tau] [ELA]
[Per] [Goz]
[TL1]

102: Groupe des nombres complexes de module 1 Racine de l'unité. Applications

I- De l'exponentielle au groupe $\mathcal{U}$ [Tau] 43-45

1) L'exponentielle complexe

- Fct exponentielle $\mathbb{C}^\infty$ + prop
- prop morphisme de groupe surjectif $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$
- Cosinus et sinus
- $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$
- $\cos^2 + \sin^2 = 1$
- Formule de Moivre

2) Le groupe des nombres complexes de module 1

[Tau] 44

- def $+ex$
- $e^{iz} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- morphisme surjectif
- def π

II- Racines de l'unité

[Goz] 68 [Per] 80

- def $\mathcal{U}_n$
- def $\mathcal{U}_n^*$
- Les seuls sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$ sont $\mathcal{U}_n$
- $\mathcal{U}_n = \bigcup_{d|n} \mathcal{U}_d$
- $\mathcal{U}_n = \bigcup_{d|n} \mathcal{U}_d^*$
- Kronecker

Dev 1

III- Applications

1) Polynômes cyclotomiques [Per] 80-82

- def

- $\deg = P(n)$
- $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$

- e^x
- $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$
- Φ_n irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$
- Critère faible

2) Lien avec la géométrie (Per) 146

- $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U} \rightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R})$
 $\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
- groupe des angles

102. Groupe des nombres complexes de module 1.
Racines de l'unité. Applications

I- De l'exponentielle au groupe $\mathcal{U}$

1) L'exponentielle complexe.

[Eau] 43 ELA2 257 Proposition/définition 1: On définit la fonction exponentielle complexe par $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Cette série a un rayon de convergence infini.

Proposition 2: La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$ et admet e^z comme dérivée $\forall z \in \mathbb{C}$.

Proposition 3: $\forall z, z' \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} & \bullet e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \bullet e^z \neq 0 \quad \bullet (e^z)^{-1} = e^{-z} \\ & \bullet |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad \bullet |e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \quad \bullet \overline{e^z} = e^{\bar{z}} \end{aligned}$$

[Eau] 44 Théorème 4: La fonction exponentielle complexe induit un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$. Il est continue, surjectif mais non injectif.

Définition 5: On appelle cosinus et sinus complexe, et on note respectivement $\cos$ et $\sin$, les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Proposition 6: $\forall z \in \mathbb{C}$

- $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$
- $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

Théorème 7: (Formule de Moivre)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

2) Le groupe des nombres complexes de module 1

Définition 8: On appelle cercle unité de $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1:

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad \mathbb{C} \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{C}^*, \times)$$

Exemple 9: $1, -1, i, -i$ sont des éléments de $\mathcal{U}$

Proposition 10: $e^{iz} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Théorème 11: L'application $t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{U}, \times)$.

Son noyau est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$. Le réel qui est le plus petit réel positif t tel que $e^{it} = 1$ est noté 2π .

$$\text{Ainsi } \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathcal{U}$$

II- Les racines de l'unité

Définition 12: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une racine n ème de l'unité est un complexe z tel que $z^n = 1$.

On note $\mathcal{U}_n$ le groupe des racines n èmes de l'unité

602
68

Définition/proposition 13: M_n est un groupe cyclique d'ordre n pour la multiplication. On appelle racine primitive n -ième de l'unité tout générateurs de M_n . On note M_n^* l'ensemble des racines n -ième primitive.

Proposition 14: Les seuls sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$ sont M_n $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Notation 15: On note M_∞ l'ensemble des racines de l'unité

Proposition 16: $M_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$

2r] 0
$$M_n = \{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \}$$

$$M_n^* = \{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, k \wedge n = 1 \} \quad |M_n^*| = \varphi(n)$$

Proposition 17: $M_n = \bigcup_{d|n} M_d^*$

Théorème 18: (Kronecker)

DEV 1

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Si les racines complexes de P sont non nulles et de module inférieur ou égal à 1, alors ce sont des racines de l'unité.

III-Applications

1) Polynômes cyclotomiques

Définition 19: On appelle n -ième polynôme cyclotomique la polynôme $\Phi_n(x) = \prod_{s \in M_n^*} (x-s)$

Remarque 20: Φ_n est unitaire et de degré $\varphi(n)$

Proposition 21: On a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$

Remarque 22: Par récurrence on obtient

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n, d \neq n} \Phi_d(x)}$$

Exemples 23 $\Phi_1(x) = x-1$ $\Phi_3(x) = x^2+x+1$

$\Phi_2(x) = x+1$ $\Phi_4(x) = x^2+1$

Proposition 24: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[X]$

Théorème 25: Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

Théorème 26: (Dirichlet faible)

DEV 2

Soit $n \geq 1$. Alors il existe une infinité de nombres premiers vérifiant $p \equiv 1 [n]$

2) Lien avec la géométrie

Théorème 27: On dispose des isomorphismes de groupes:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow M \longrightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R}) \\ \theta &\longmapsto e^{i\theta} \longmapsto R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition 28: L'élément $\bar{\theta}$, image de θ dans $\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ s'appelle l'angle de $R(\theta)$. Le groupe $\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ s'appelle le groupe des angles.

82

146

Outil puissant en algèbre et géométrie

↳ boucle unité ↳ nombreuses propriétés

102: Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité
Applications

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad RCV \infty$$

Exponentielle complexe

→ écriture + manipulation des nombres complexes

Homéomorphisme

$(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$
 $\mathbb{C}^0$ surjectif
non injectif

Polynômes cyclotomiques

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{\zeta \in \mathcal{U}_n^* \\ \zeta \neq 1}} (X - \zeta) \in \mathbb{Z}[X]$$

irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$

↳ répartition + fine de l'infinité des nb premiers

Th Dirichlet
DEV2

$\mathcal{U}_n^*$ racines primitives n-ème

cyclique

Racines de l'unité

$$z^n = 1$$

Applications

Th de Kronecker (dev1)

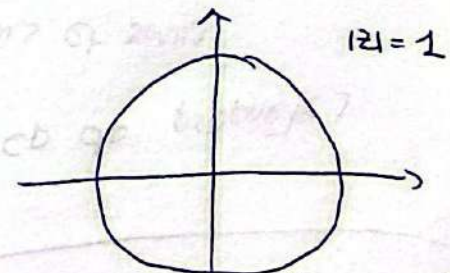
Les racines de certains polynômes sont des racines de l'unité.

$$\mathcal{U}_{\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$$

$$\mathcal{U}_n = \bigcup_{d|n} \mathcal{U}_d^*$$

Nombres complexes de module 1

particuliers



lien avec la géométrie

$$\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

groupe des angles

Permet de définir le cosinus et sinus

permet de définir π