

[Rom]
[Ber]
[Ulm]

101: Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

I- Notion d'action de groupe

1) Définitions [Rom] 19

- def, morphisme, exemples $S_n \curvearrowright [1, n]$

2) Orbites et stabilisateur [Rom] 20-21 [Ber] 171

- def orbite, stab, $x R y \Leftrightarrow \exists g \in G \ y = g \cdot x$
- action fidèle, libre, transitive
- $\text{stab} < G$

3) Equation aux classes [Rom] 21 35

- prop equation aux classe
- application orbitale bijection
- Formule de Burnside

DEV 1) a)

II- Action d'un groupe sur un groupe

1) Translation [Ulm] 34

- def
- Th de Cayley
- indice

2) Conjugaison [Ulm] 36 19 [Rom] 22

- def, classe de conjugaison
- centre Z
- $\sigma(a_1 \dots a_p) \tau^{-1} = (\tau(a_1) \dots \tau(a_p))$
- def type et 2 permutations sont conjuguées ssi m type.
- Automorphismes de S_n
- Théorème de Dixon

DEV 1 b)

III - Autres domaines

1) Isométrie du cube [Rom] 73-81

- espace affine
- produit scalaire + isométrie affine
- isométrie du cube

DEV2

2) Algèbre linéaire [Rom] 184-185

- action de $GL_n(K)$ sur $M_{n,n}(K)$ à gauche et droite
- m orbite ssi m noyau (action à gauche)
- m orbite ssi m image (action à droite)
- PA échelonnée

• Maths pour l'agreg Rombaldi

• Cours d'algèbre Perrin

• Gourdon

• Carnet de voyage en Algèbre Caldero

• Théorie des groupes Ulmer

• Algèbre le grand combat

101: Groupe opérant sur un ensemble Exemples et applications

Soit E un ensemble non vide et $S(E)$ le groupe des permutations

I - Notion d'action de groupe

1) Définitions

[Rem] p19 Définition 1: On dit que le groupe G opère à gauche sur l'ensemble E s'il y a une application $(g, x) \in G \times E \mapsto g \cdot x \in E$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in E, 1 \cdot x = x \\ \forall (g, g', x) \in G \times E, g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x \end{cases}$$

Définition 2: Une action peut être définie par le morphisme $\gamma: G \rightarrow S(E)$

$$g \mapsto \gamma_g: E \rightarrow E, x \mapsto g \cdot x$$

Exemples 3: • S_n agit sur $\{1, n\}$
• $GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

2) Orbites et stabilisateurs

p20 Définition 4: Soit G un groupe opérant sur E . Pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $\text{orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ de E est appelé orbite de x sous l'action de G .

Remarque 5: On obtient la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$ tel que $y = g \cdot x$.

p21 Définition 6: Pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ de G est le stabilisateur de x sous l'action de G .

Définition 7: On dit que l'action de G sur E est transitive si: $\forall (x, y) \in E^2, \exists g \in G \mid y = g \cdot x$.

Définition 8: On dit que l'action de G sur E est fidèle si le morphisme de groupe $\gamma: g \in G \mapsto (\gamma_g): x \mapsto g \cdot x$ est injectif, ce qui signifie que:

$$(g \in G \text{ et } \forall x \in E, g \cdot x = x) \Leftrightarrow g = 1$$

Exemple 9: $G = GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright E = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

G agit sur E par $G \times E \rightarrow E$ est fidèle
 $(M, v) \mapsto Mv$ et transitive
+ def libre [Ulm] p33

Proposition 10: Soit G un groupe, pour tout $x \in E$
 $G_x \triangleleft G$.

3) Equation aux classes

Théorème 11: Si G est fini, pour tout $x \in E$

$$\text{Card}(\text{orb}(x)) = [G:G_x] = \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(G_x)}$$

Théorème 12: (Equation aux classes)

Soit G un groupe fini agissant sur E fini. En notant $\text{orb}(x_1), \dots, \text{orb}(x_r)$ les orbites deux à deux disjointes, on a:

$$\text{Card}(E) = \sum_{i=1}^r \text{Card}(\text{orb}(x_i)) = \sum_{i=1}^r \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(G_{x_i})}$$

Proposition 13: Formule de Burnside

Soit $G \curvearrowright E$ avec G et E fini. Pour tout $g \in G$, on note $\text{Fix}(g) = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$ et Σ l'ensemble des orbites

$$\text{Alors } |\Sigma| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

[Ber] p121

[Rem] p21

p35

Dev 1a)

II- Utilisation sur les groupes finis

1) Translation

[Ulm]
p34
Définition 14: Un sous-groupe G de S_n est transitif si l'action $\varphi: G \curvearrowright S_n$ induite de G sur $[1, n]$ est transitive

Définition 15: Un groupe G agit sur lui-même par translation à gauche en posant
 $G \times G \rightarrow G \quad (g, h) \mapsto g \cdot h = gh$

Proposition 16: L'action par translation est fidèle et libre

Théorème 17 (Cayley): Tout groupe fini G d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe transitif de S_n

2) Conjugaison

p36
Définition 18: Un groupe G agit sur lui-même par conjugaison en posant:

$$G \times G \rightarrow G \quad (g, h) \mapsto g \cdot h = g h g^{-1}$$

Définition 19: L'orbite $\{g h g^{-1} \mid g \in G\}$ de $h \in G$ sous l'action par conjugaison de G sur lui-même s'appelle la classe de conjugaison de h . Deux éléments de G qui appartiennent à la même classe de conjugaison sont dits conjugués.

Le stabilisateur de $h \in G$ s'appelle le centralisateur noté $C(h)$

p19
Définition 20: On note $Z(G)$ le centre du groupe G c'est-à-dire l'ensemble des éléments de G commutant avec tous les éléments de G

Corollaire 21: Soit $G \curvearrowright G$ par conjugaison. En notant $\text{Orb}(h_1), \dots, \text{Orb}(h_r)$ ses orbites deux à deux distinctes, on a:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r |\text{Orb}(h_i)|$$

Proposition 22: Deux permutations σ et ρ de S_n sont conjuguées dans S_n ssi elles ont le même type. En particulier, pour $w \in S_n$ et tout cycle $(i_1, \dots, i_\ell) \in S_n$ on a: $w(i_1, i_2, \dots, i_\ell)w^{-1} = (w(i_1), \dots, w(i_\ell))$

Théorème 23: Dixon DEV 1b)

Soit G un groupe non abélien fini d'ordre n . Soit k le nombre de classes de conjugaison du groupe G . On note $p(G)$ la probabilité pour que 2 éléments de G tirés uniformément et indépendamment commutent.

$$\text{Alors } p(G) = \frac{k}{n} \leq \frac{5}{8}$$

III- Autres domaines

1) Algèbre linéaire

Définition 24: L'application: $\varphi: GL_n(K) \times M_{n,m}(K) \rightarrow M_{n,m}(K)$
 $(P, A) \mapsto PA$

définit une action de $GL_n(K)$ sur $M_{n,m}(K)$ appelée action par translation à gauche

Théorème 25: Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont le même noyau.

Définition 26: De même on définit l'action par translation à droite par: $\varphi: GL_n(K) \times M_{n,m}(K) \rightarrow M_{n,m}(K)$
 $(P, A) \mapsto AP^{-1}$

Théorème 27: Deux matrices sont dans la même orbite par cette action ssi elles ont la même image

Théorème 28: Soit $A \in M_{nm}(K)$. Il existe une matrice $P \in GL_n(K)$ produit de matrices de permutation et de transposition telle que PA soit échelonnée en lignes.

Cette matrice PA est dans l'orbite de A pour l'action par translation à gauche.

2) Géométrie

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

[Rom] Définition 29: Un espace affine de direction E est
73 un ensemble non vide $\mathcal{E}$ sur lequel on peut définir une action simplement transitive:

$$(x, u) \in \mathcal{E} \times E \mapsto x + u$$

81 Proposition 30: On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Le produit scalaire permet de définir une distance sur $\mathcal{E}$ avec $d(x, y) = \|\vec{xy}\| \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$.

Définition 31: On appelle isométrie affine toute application $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui conserve les distances, c'est à dire telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{E}^2$.
On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$.

Définition 32: Soit $\mathcal{C}$ le cube. On désigne par $Is(\mathcal{C})$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui conservent le cube.

Et $Is^+(\mathcal{C})$ les isométries de déterminant 1 conservant le cube.

Et $Is(S)$ isométries contenant les sommets du cube.

Théorème 33: le groupe $Is(S)$ agit de façon transitive sur S et il y a 48 éléments.

$$Is^+(S) \simeq S_4 \quad \text{et} \quad Is(S) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

DEV2

88

La Théorie des actions de groupe permet d'étudier les interactions entre ensembles et ainsi d'obtenir des propriétés sur le groupe agissant ou sur l'ensemble sur lequel il agit

$$G \curvearrowright E$$

$$g \cdot x \in E$$

exemple $S_n \curvearrowright [1, n]$

Orbite et
Stabilisateurs

101: Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

Matrice semblables

Algèbre linéaire

Géométrie

$$I_s(S) \curvearrowright S$$

cube

$$I_s^+(S) \simeq S_4$$

DEV2

Groupes finis

translation
 $g \cdot R = gR$

Conjugaison
 $g \cdot R = gRg^{-1}$

Th Dixon

$$P(G) = \frac{r}{n} \leq \frac{5}{8}$$

DEV1

Propriétés sur le cardinal

→ Equations aux classes

$$\rightarrow \text{Card}(\text{Orb}(x)) = \frac{|G|}{|\text{Stab}x|}$$

$$E = \bigsqcup_{i=1}^r \text{Orb}(x_i)$$

Formule de Burnside

$$|S| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

→ utile au dénombrement