

Prop (Poisson) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ C^1
 avec $f(x) = O(\frac{1}{|x|})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{|x|^2})$
 alors $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt$

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$

Preuve
 Soit $K > 0$ alors pour $|x| < K$,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|+1} \leq \frac{\pi}{(x+K)^2}$$

donc la convergence normale
 (g. d'une s. convergente)

Notons F la limite simple.

On veut la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$

converge normalement.

Par théorème de majoration des séries de fonctions, F est C^1 et
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$.

Remarquons que F est 1-périodique.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{2\pi i n x}$$

Calculons les coefficients de Fourier de F . Soit $N \in \mathbb{N}$.

On a :

$$C_N(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2\pi i N t} dt = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) e^{-2\pi i N t} dt$$

donc par CUV :

$$C_N(F) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n) e^{-2\pi i N t} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi i N(t-n)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi i N t} dt \right) e^{2\pi i N n} = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i N t} dt = 1$$

$$C_N(F) = \hat{f}(N)$$

Comme F est C^1 par th. de conv. norm. des SF,

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

avec convergence normale. $\square$

Corr (Shannon) $K > 0$
 $B_K = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| > K\}$
 Soit $K < \frac{1}{2}$, alors pour $f \in S(\mathbb{R}) \cap B_K$
 on a $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \text{sinc}(t-n)$

Preuve
 $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ donc est C^∞ , et on se ramène à l'hypothèse de Poisson.

$$\text{Alors } \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \xi}$$

$\hat{f} \in B_K$ donc $\hat{f}(n) = 0$ si $|n| > K$

pour $k=0$, on a $\hat{f}(\xi+k)$ nulle sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \text{sinc}(\xi-n)$$

$$\text{Alors } \hat{f} = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi-n) \text{sinc}(\xi-n)$$

Encore une fois par la formule de Schwarz, pour $t \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi-n) e^{2\pi i \xi t} d\xi$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(-n) \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i (\xi+n)t} d\xi$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \xi t} d\xi$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \text{sinc}(t-n)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \xi(t-n)} d\xi = \left[\frac{e^{2\pi i \xi(t-n)}}{2\pi i(t-n)} \right]_{-1/2}^{1/2} = \text{sinc}((t-n)\pi)$$

donc la formule. $\square$

Autre application $\forall \Delta > 0$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{\Delta}}$$

$$= \Theta(1) \quad \text{car } \Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta(1)$$

On applique Poisson en $x=0$.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{\Delta}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \quad \text{car } f(x) = e^{-\frac{\pi x^2}{\Delta}}$$

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}} e^{-\frac{\pi \xi^2 \Delta}{\pi}} = \sqrt{\Delta} e^{-\frac{\pi \xi^2 \Delta}{\pi}}$$

Alors f est une fonction en t de p .

$$p = N(\sigma)$$

$$p = \sigma \sqrt{2\pi}$$

$$N(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

Prop (Poisson) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ C^1
avec $f(n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $f'(n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
pour $|n| \rightarrow +\infty$

Notons $\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i z t} dt$

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$

Preuve.
Soit $K > 0$. Alors pour $|n| < K$,

$$|f(n)| \leq \frac{M}{|n|^{1/2}} \leq \frac{\pi}{(|n| - K)^{1/2}}$$

d'où la convergence normale

t.g. d'une s. convergente

Notons F la limite simple.

De même la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$

converge normalement.

Par le théorème d'ordre des séries de fonctions, F est C^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$$

Remarquons que F est 1-périodique.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+m) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} f(n'+1) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} f(n'+1)$$

$n' = n+1$
pour tout n

Calculons les coefficients de Fourier de F . Soit $N \in \mathbb{N}$.

On a :

$$c_N(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2\pi i N t} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) e^{-2\pi i N t} dt$$

donc par CVU :

$$c_N(F) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n) e^{-2\pi i N t} dt$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i N(t-n)} dt$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi i N t} dt \right) e^{2\pi i N n}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i N t} dt$$

$$c_N(F) = \hat{f}(N)$$

Comme F est C^1 par th. de conv. norm. des SF,

$$\text{on a } F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

avec convergence normale. $\square$

Corr (Shannon)
 $B_{1/2}$

$$2K < \frac{1}{2}$$

on a $\forall t \in \mathbb{R}$

Preuve.
 $\hat{f} \in \mathcal{B}_K$ d'après l'hypothèse d.

Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$\hat{f} \in \mathcal{B}_K$ donc

pour $k \neq 0$, on a

$$\hat{f}(\xi + k) = 0$$

Corr (Shannon) $K > 0$

$$B_K = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \text{supp}(u) \subseteq [-K, K]\}$$

Si $K < \frac{1}{2}$, alors pour $f \in S(\mathbb{R}) \cap B_K$

$$\text{on a } \forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \text{sinc}(t-m)$$

Preuve.

$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc est C^1 , et vérifie les hypothèses de Poisson.

$$\text{Ainsi } \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2\pi i m \xi}$$

$\hat{f} \in B_K$ donc $\hat{f}(m) = 0$ pour $|m| > K$.
par la formule de Schwarz

$$\hat{f}(\xi+k) \text{ nulle sur } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$A_{\text{inv}} \quad \hat{f} = \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi+k)$$

$$\hat{f} = \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) e^{2\pi i m \xi}$$

Encore une fois par la formule de Schwarz, pour $t \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) e^{2\pi i \xi(t+m)} d\xi$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \xi(t+m)} d\xi$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \xi(t-m)} d\xi$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \xi(t-m)} d\xi = \left[\frac{e^{2\pi i \xi(t-m)}}{2\pi i(t-m)} \right]_{-1/2}^{1/2} = \text{sinc}((t-m)\pi)$$

également en $t=m$

D'où la formule. $\square$

Autre application. $\forall \Delta > 0$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 \Delta} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi m^2}{\Delta}} = \Theta(\Delta) \quad \text{i.e } \Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

On applique Poisson en $x=0$.

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi m^2}{\Delta}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \quad \text{or } f(x) = e^{-\frac{x^2}{\Delta}}$$

$$\text{et } L^1 \text{ avec } \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\Delta}} e^{-\frac{\pi \xi^2 \Delta}{1}} = \sqrt{\Delta} e^{-\pi \xi^2 \Delta}$$

$\square$

Il n'y a pas de facteur non trivial de p .

$$p = N(\mathfrak{o})$$

$$p = \text{ord}$$