

Prop. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Alors

$$\Gamma(n) \Gamma(n+1) = \frac{n!}{2\pi(n+1)}$$

Preuve.

$$\Gamma(n) \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \int_0^{\infty} s^n e^{-s} ds$$
(Fubini-Tonelli)

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{n-1} s^n e^{-(t+s)} dt ds$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} \frac{1}{s^{n+1}} e^{-s(1+t/s)} ds dt$$

On pose $\varphi: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$
 $(u, v) \mapsto (u, \frac{v}{u})$

de surplu:
 $\varphi: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$
 $(u, v) \mapsto \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right)$
 bijectif de $\mathbb{R}_+^2$ sur $\mathbb{R}_+^2$.

$$J_{\varphi}(u, v) = \left| \frac{1}{1+v} \frac{-v}{(1+v)^2} \right| = \frac{1}{(1+v)^2}$$

Par CDD

$$\Gamma(n) \Gamma(n+1) = \int_{\mathbb{R}_+^2} u^{n-1} e^{-u} \frac{1}{(1+v)^2} \frac{1}{u^{n+1}} du dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{e^{-u}}{u^2} du dv$$

$$\Gamma(n) \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du \int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v)^2}$$

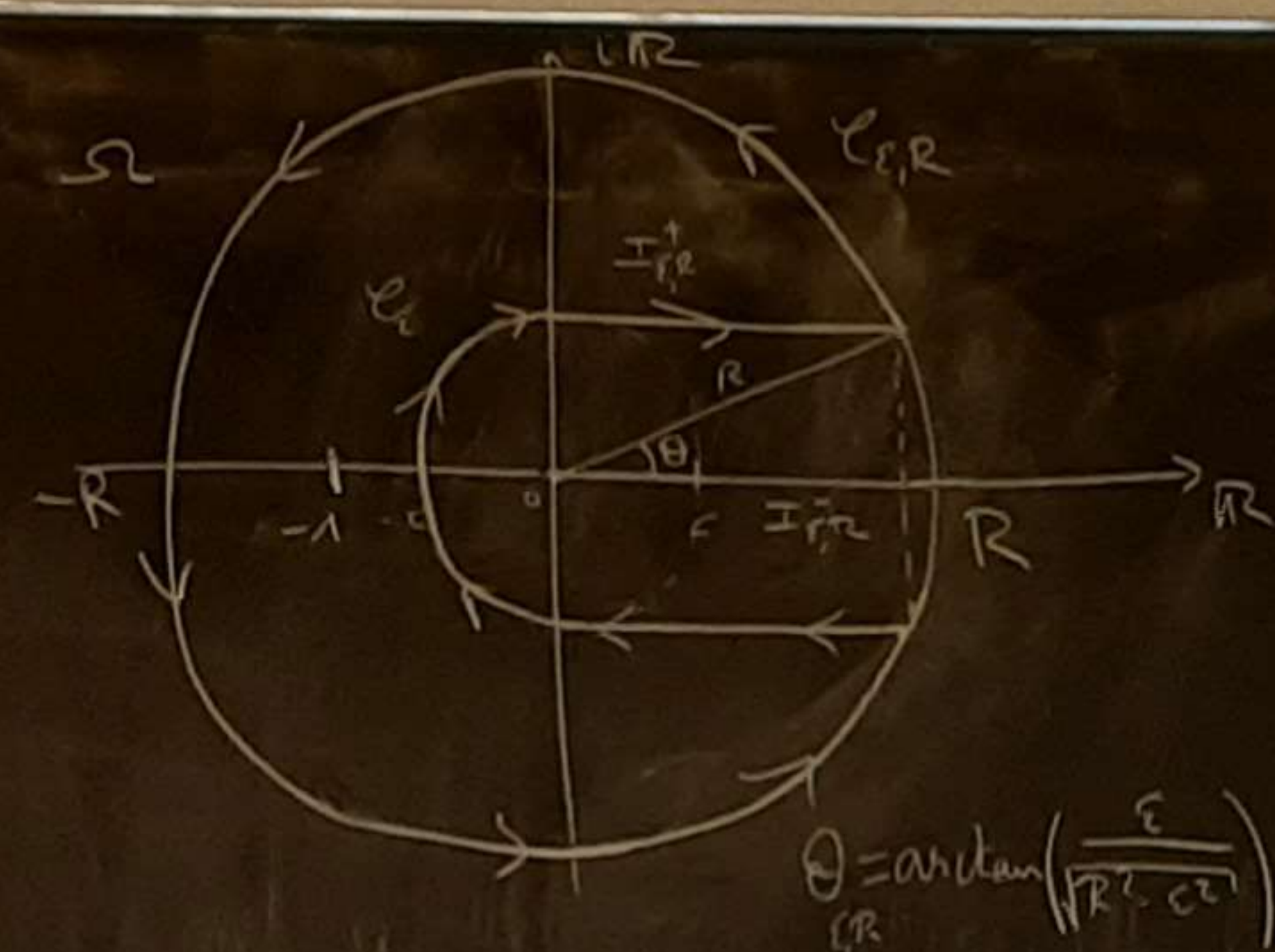
$$= 1 \cdot 1 = 1$$

Calculer $I(n)$.
 Méthode: Résoudre.

$$\Omega = \mathbb{C} - (\mathbb{R}_+ \cup \{1\})$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{z^2(z+1)}$$
 avec $\log$ de dév. exposée.
 $\log(z) = \log|z| + i\theta$
 $\theta \in]-\pi, \pi[$



$$\gamma_{\epsilon,R} = C_{\epsilon,R} \cup I_{\epsilon,R}^+ \cup C_{R,R} \cup I_{R,R}^-$$

 De plus $(z+1)f(z) \xrightarrow{z \rightarrow -1} e^{-i\pi} = -1$

Alors:
$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z) dz = 2i\pi e^{-i\pi}$$

$$= \int_{C_{\epsilon,R}} f + \int_{C_{\epsilon,R}^+} f + \int_{I_{R,R}^+} f + \int_{I_{R,R}^-} f$$

Paramétrage $\gamma_{\epsilon,R}: t \mapsto Re^{it}$ sur $[\theta, 2\pi-\theta]$
 $\gamma_{\epsilon,R}^+ : t \mapsto \epsilon e^{it}$ sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
 $\gamma_{\epsilon,R}^- : t \mapsto \epsilon e^{-it}$ sur $[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 But $R \rightarrow \infty$ $\gamma_{\epsilon,R}^- \mapsto -i\epsilon e^{-it} \approx -i\epsilon e^{-it}$

Contribution des arcs

$$C_{\epsilon,R} \int_{C_{\epsilon,R}} f = \int_0^{2\pi-\theta} \frac{iRe^{it}}{R^2 e^{it} (1+Re^{it})} dt$$

$$= R^{-1} \int_0^{2\pi-\theta} \frac{e^{it} (1-u)}{1+Re^{it}} dt$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} (1-u)}{1+Re^{it}} dt$$

$$|1| \leq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1+Re^{it}|}$$

Donc $\int_{C_{\epsilon,R}} f \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1-n}}{R-1} \sim R^n \leq \frac{1}{R-1}$
 $\downarrow R \rightarrow \infty$
 0
 La contribution nulle.

C_{ϵ} Même calcul au zéro pôle, pour $\epsilon > 0$, et

$$\left| \int_{C_{\epsilon}} f \right| \leq \pi \frac{\epsilon^{1-n}}{\epsilon-1} \sim \pi \epsilon^{-n}$$
 $\downarrow \epsilon \rightarrow 0$
 0

La contribution nulle.
 Contribution des segments

$$I_{R,R}^+ \int_{I_{R,R}^+} f = \int_1^R \frac{\sqrt{R^2 - u^2}}{u^2 (1+Re^{it})} dt$$

$$= \int_1^R \frac{g(u)}{u^2 (1+Re^{it})} du$$

$$g(u) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{-R e^{-2i\pi}}{(R^2 - u^2)^2 (1+Re^{it})}$$

$$+ |g(u)| \leq \frac{R}{(R^2 - u^2)^2 (1+Re^{it})}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^3} \leq \frac{1}{R^3}$$

donc par CDD,

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^1 g(u) du = -e^{-i\pi} \int_0^1 \frac{du}{u^2 (1+u)}$$

$$= -e^{-i\pi} I(n)$$

$I_{\epsilon,R}^-$ Soient, pour limite $\epsilon \rightarrow 0$ on a $e^{-i\pi} = -1$.

$$I_{\epsilon,R}^- \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{du}{u^2 (1+u)}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} I(n)$$

Conclusion

$$2i\pi e^{-i\pi} = (1 - e^{-2i\pi}) I(n)$$
 d'où
$$I(n) = \pi \frac{2i}{e^{-i\pi} - 1}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} = I(1-n) \quad \square$$
 Pq on étend à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ par prolongement analytique.

Prop Soit $n \in]0, 1[$ - Alors :

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$$

Preuve :

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} s^{-n} e^{-s} ds$$

(Fubini-Tonelli)

$$= \iint_{\mathbb{R}_+^2} t^{n-1} s^{-n} e^{-(s+t)} dt ds$$

$$= \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} \frac{1}{t} e^{-(s+t)} dt ds$$

On pose $\varphi: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$

$$(s, t) \mapsto (s+t, \frac{t}{s})$$

de mapping :

$$\varphi: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v} \right)$$

Autres deux ∞ , avec :

$$\text{Jac}_{(u,v)} \varphi = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u(1+v)-uv}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

Par CDV

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \int_{\mathbb{R}_+^2} u^x e^{-u} \frac{1+v}{uv} \frac{u}{(1+v)^2} du dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{u^{n-1} e^{-u}}{v} \frac{1}{1+v} du dv$$

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-1} du}_{=1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^n(1+v)}}_{=: I(1-n)}$$

Calculer $I(n)$.

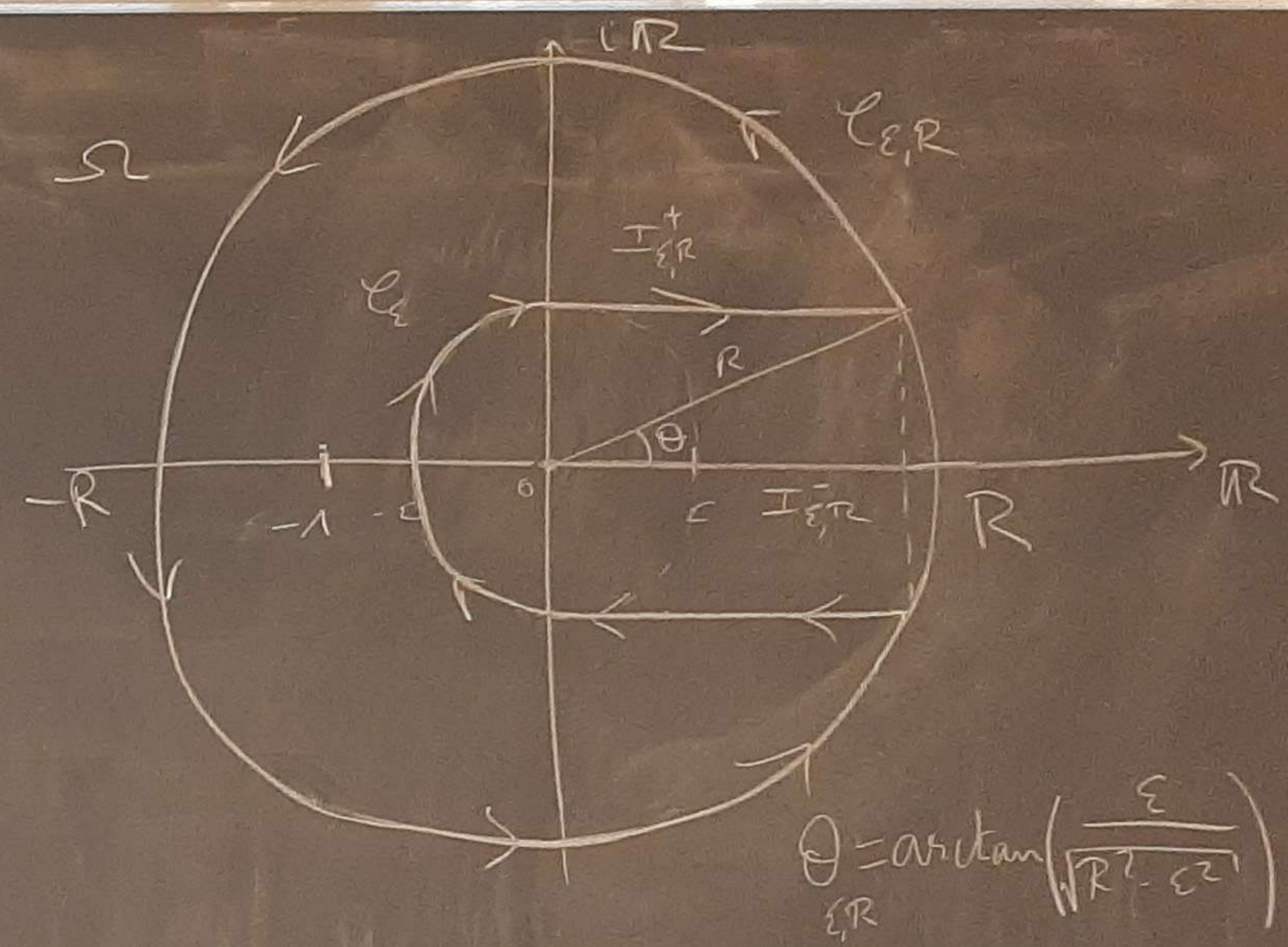
Méthode Résidus.

$$\Omega = \mathbb{C} - (\mathbb{R}_+ \cup \{-1\})$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{z^n(1+z)}$$

avec $\log$
à def.
espèce
 $\log(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$
 $\theta \in]0, 2\pi[$



$$\gamma_{\epsilon, R} = C_{\epsilon} \cup I_{\epsilon, R}^+ \cup C_{\epsilon, R} \cup I_{\epsilon, R}^-$$

De plus $(z+1)f(z) \xrightarrow{z \rightarrow -1} e^{-x \log(-1) - i\pi n} = e$

Ainsi :

$$\int_{\gamma_{\epsilon, R}} f(z) dz = 2i\pi e^{-i\pi n}$$

$$= \int_{C_{\epsilon, R}} f + \int_{C_{\epsilon}} f + \int_{I_{\epsilon, R}^+} f + \int_{I_{\epsilon, R}^-} f$$

Paramètres

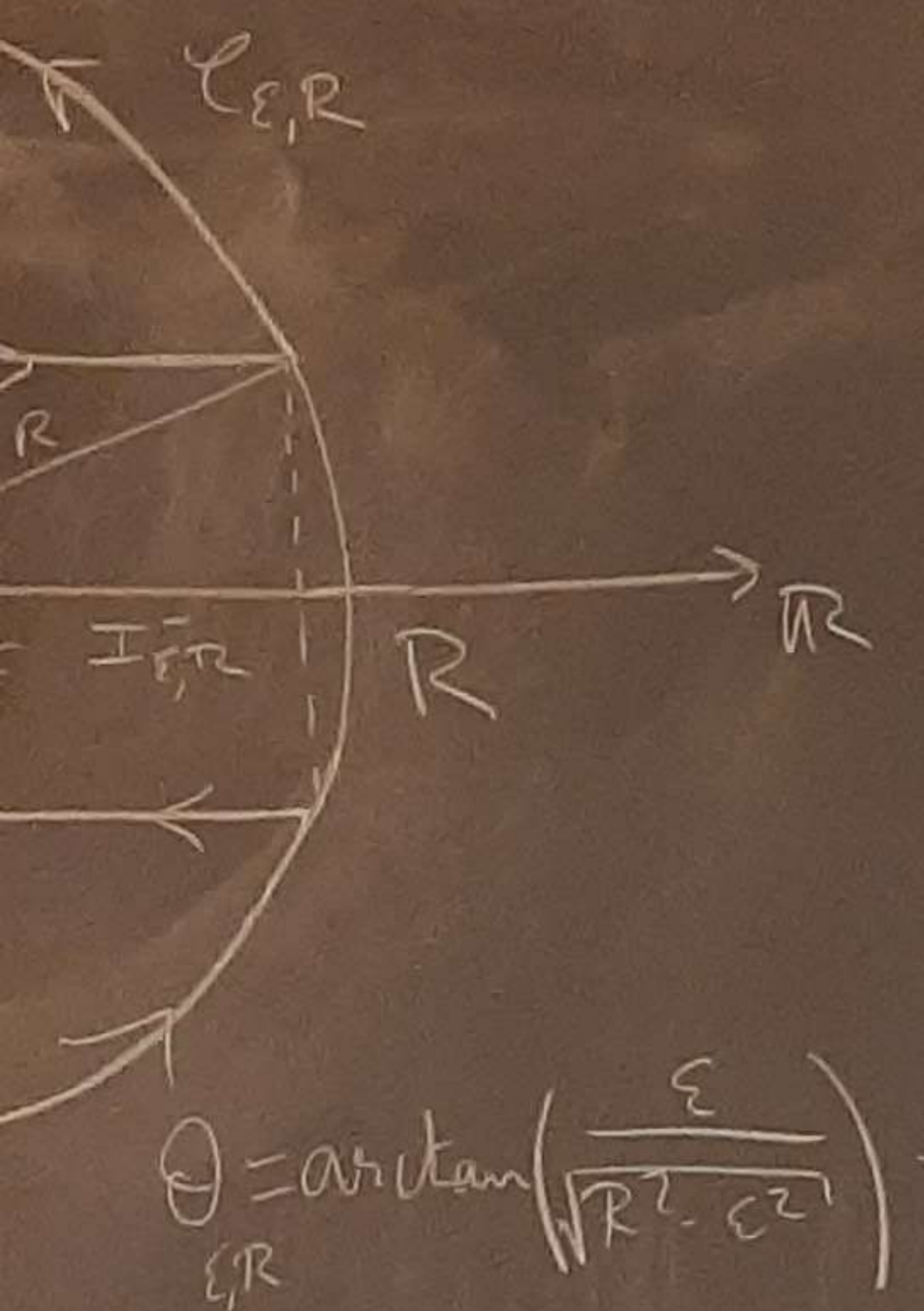
But $R \rightarrow +\infty$

Contributions

$$C_{\epsilon, R} \int$$

d'où $\int_{C_{\epsilon, R}} f$

Les contributions



$\theta = \arctan\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{R^2 - \epsilon^2}}\right)$
 $R \cup I_{\epsilon, R}$
 $(z) \rightarrow e^{-x \log(1)} = e = 1$
 $R \rightarrow -1$
 $2i\pi e^{-i\pi n}$
 $f + \int_{I_{\epsilon, R}} f$

Paramétrage
 $\gamma_{\epsilon, R} : t \mapsto Re^{it} \text{ sur } [\theta, 2\pi - \theta]$
 $\gamma_{\epsilon} : t \mapsto \epsilon e^{it} \text{ sur } [\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\gamma_+ : t \mapsto i\epsilon + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}t$
 But $R \gg \epsilon \gg 0$ $\gamma_- : t \mapsto -i\epsilon + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}(1-t)$ sur $[0, 1]$

Contribution des arcs
 $C_{\epsilon, R} \int f = \int_0^{2\pi - \theta} \frac{iRe^{it}}{R^2 e^{it}(1 + Re^{it})} dt$
 $= R^{1-n} \int_0^{2\pi - \theta} \frac{e^{it(1-n)}}{1 + Re^{it}} dt$
 $\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it(1-n)}}{1 + Re^{it}} dt$
 $|f| \leq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1 + Re^{it}|}$
 d'où $\int_{C_{\epsilon, R}} f \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{R^{1-n}}{R-1} \sim R^{-n} \leq \frac{1}{R-1}$
 $\downarrow R \rightarrow +\infty$
 0

↳ contribution nulle -

C_{ϵ} Même calcul au symétrique,
 pour $\epsilon \rightarrow 0$, et:
 $\left| \int_{C_{\epsilon}} f \right| \leq \pi \frac{\epsilon^{1-n}}{\epsilon-1} \sim -\pi \epsilon^{1-n} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$

↳ contribution nulle -
Contribution des segments

$I_{\epsilon, R}^+ \int f = \int_0^1 \frac{\sqrt{R^2 - \epsilon^2}}{e^{i \log(-i\sqrt{R^2 - \epsilon^2})} (1 - e^{i\sqrt{R^2 - \epsilon^2}} t)} dt$
 $g(\epsilon, t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-R e^{-2i\pi n}}{(2n-1)^n (1 + Re^{it})}$
 $|g(\epsilon, t)| \leq \frac{R}{(R^2 - \epsilon^2)^n (1 + \sqrt{R^2 - \epsilon^2})}$
 $\epsilon \leq \frac{1}{2}, R = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} \leq R$
 $\in C^1(\frac{1}{2}, 1)$

donc par CVD,
 $\int_{I_{\epsilon, R}} f \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 g(\epsilon, t) dt = -e^{2i\pi n} \int_0^1 \frac{du}{u^n(1+u)}$
 $\downarrow R \rightarrow +\infty$
 $I(n)$

$I_{\epsilon, R}^-$ Somme, pour $k=0$ en $e^{-2i\pi n}$ pour $e^{-i\pi n} = 1$,
 d'où $I_{\epsilon, R}^- \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{du}{u^n(1+u)}$ (par échange des bornes)
 $\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I(n)$

Conclusion
 $2i\pi e^{-i\pi n} = (1 - e^{2i\pi n}) I(n)$
 d'où $I(n) = \pi \frac{2i}{e^{i\pi n} - e^{-i\pi n}}$
 $I(n) = \frac{n}{\sin(\frac{n\pi}{2})} = I(1-n) \quad \square$

$R_{\mathbb{Q}}$ On étend à $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ par prolongement analytique -