

Prop Soit H un espace de Hilbert séparable.
De toute suite bornée (f_n) de H
on peut extraire une sous-suite
faiblement convergente.

Soit $D \subseteq H$ dénombrable dense -
 $= \{h_k, k \in \mathbb{N}\}$.

* Sous-suite convergente extraire D .

Par Cauchy-Schwarz, $\forall \|f\| \leq M \in \mathbb{R}_+$,
 $\langle f, h_k \rangle \leq M \|h_k\|$

Alors $(\langle f, h_k \rangle)_k$ est bornée dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

D'ici une extraction :

$$\langle f_{p(k)}, h_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \ell_k$$

De même, par C-S, $(\langle f_{p(k)}, h_k \rangle)_k$ est bornée, d'où $(\langle f_{p(p(k))}, h_k \rangle)_k$ convergente,
et ainsi de suite : $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extrême
avec $(\langle f_{\varphi(p_1 \circ \dots \circ \varphi)(n)}, h_{k(n)} \rangle)_n$ CV.

Prenons la diagonale $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto \varphi \circ \dots \circ \varphi(n)$,
extérieure telle que
 $(\langle f_{\varphi(n)}, h_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ CV $\forall k \in \mathbb{N}$.

Alors $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

* Convergence de $(f_{\varphi(n)})$ contre tout H :

Soit $g \in H$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On a $\|g - h_k\| < \varepsilon$ pour un $k \in \mathbb{N}$,
car $\overline{D} = H$.

De plus $(\langle f_{\varphi(n)}, h_k \rangle)_n$ est CV d'après
de Cauchy donc :

$$\forall n \quad \forall k, m \quad |\langle f_{\varphi(n)}, h_k \rangle - \langle f_{\varphi(m)}, h_k \rangle| \leq \varepsilon.$$

Si $n, m \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} |\langle f_{\varphi(n)}, g \rangle - \langle f_{\varphi(m)}, g \rangle| &\leq |\langle f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}, g \rangle| \\ &\leq \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}\| \|g\| \\ &\quad + |\langle f_{\varphi(n)}, g - h_k \rangle| \\ &\leq \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}\| \|g\| + \varepsilon \|g\| \\ &\leq 2M\varepsilon \end{aligned}$$

Alors $(\langle f_{\varphi(n)}, g \rangle)_n$ est de Cauchy,
donc, comme H est complet, converge.

Nous avons $L(g)$ se trouve :

* Conclusion

L est une forme bilinéaire continue
sur H .

car $|L(g)| = |\langle f_{\varphi(n)}, g \rangle| \leq M \|g\|$.
Par le théorème de représentation de Riesz,
 $L(g) = \langle f, g \rangle$ pour une $f \in H$.
 $\forall g \in H$
On a donc $f_n \rightharpoonup f$. $\square$

Application Soit H un Hilbert réel,
 $C \subseteq H$ convexe fermé non vide ni borné
 J différentiable, convexe sur H et
continue. Alors elle admet un minimum.

Lemme Si $f_n \rightarrow f$, alors
 $f \in \overline{\text{Conv}(f_n, n \in \mathbb{N})}$.

En effet, Soit C l'enveloppe convexe
fermée de $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, soit P_C la
projection orthogonale sur C .

Par le théorème de PSCF,

$$\langle f_n - P_C(f), f - P_C(f) \rangle \leq 0$$

A la limite faible,

$$\|f - P_C(f)\|^2 = 0$$

d'où $f = P_C(f) \in C$.

Preuve de l'application

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{C}^N$ majorée
par $\inf J \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(x_n) est bornée, car C est :

Donc $x_{p(k)} \rightarrow x$ par le théorème,

avec donc de plus $x \in \overline{\text{Conv}(x_n, n \in \mathbb{N})}$.

$$\text{Alors : } J(x_n) \geq J(x) + \langle P_C J, x_n - x \rangle$$

Pour $n \rightarrow \infty$, on a $n \langle J, x \rangle \geq n \langle J, x \rangle$

$$\text{d'où } J(x) = \inf J \geq \inf J$$

et le minimum se trouve en x .

Remarque Si H n'est plus séparable,
le théorème est vrai.

Soit $\tilde{H} = \text{Vect}\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ séparable.

On a $f_{\varphi(n)} \rightharpoonup f \in \tilde{H}$.

Par TSO, $H = \tilde{H} \oplus \tilde{H}^\perp$.

Alors pour $h = h_1 + h_2 \in H$,

$$\begin{aligned} \langle f_{\varphi(n)}, h \rangle &= \langle f_{\varphi(n)}, h_1 \rangle + \langle f_{\varphi(n)}, h_2 \rangle \\ &\downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \langle f, h_1 \rangle &\qquad \qquad 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle f, h_1 \rangle + 0 \quad \text{car } f \in \tilde{H} \\ &= \langle f, h_1 \rangle + \langle f, h_2 \rangle \\ &= \langle f, h \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle f_{\varphi(n)}, h \rangle = \langle f, h \rangle. \quad \square$$

Prop Soit H un espace de Hilbert séparable.
De toute suite bornée (f_n) de H
peut extraire une sous-suite
faiblement convergente.

Soit $D \subseteq H$ dénombrable dense -
 $= \{h_k, k \in \mathbb{N}\}$ -

* Sous-suite convergente contre D :

Par Cauchy-Schwarz, si $\|f_n\| \leq M \in \mathbb{R}_+$,
 $\langle f_n, h_0 \rangle \leq M \|h_0\|$

Donc $(\langle f_n, h_0 \rangle)_n$ est bornée dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

D'où une extraction :

$$\langle f_{p(n)}, h_0 \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$$

De même, par e.-s., $(\langle f_{p(n)}, h_k \rangle)_n$
est bornée, d'où $(\langle f_{p \circ q(n)}, h_k \rangle)_n$ convergente,
et ainsi de suite : $\varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ extracteurs
avec $(\langle f_{p \circ \dots \circ \varphi_k(n)}, h_{k+1} \rangle)_n$ CV.

Prenons la diagonale $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n)$,
extracteur telle que
 $(\langle f_{\varphi(n)}, h_k \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ CV $\forall k \in \mathbb{N}$.

Donc $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

* Convergence de $(f_{\varphi(n)})$ contre tout H :

Soit $g \in H$.

Soit $\varepsilon > 0$ -

On a $\|g - h_k\| < \varepsilon$ pour un $k \in \mathbb{N}$,
car $\overline{D} = H$.

De plus $(\langle f_{\varphi(n)}, h_k \rangle)_n$ est CV dans
de Cauchy dans.

$$\exists N \forall n, m \quad |\langle f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}, h_k \rangle| \leq \varepsilon.$$

Si $n, m \geq N$, on a :

$$|\langle f_{\varphi(n)}, g \rangle - \langle f_{\varphi(m)}, g \rangle| \leq |\langle f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}, g \rangle|$$

$$\leq |\langle f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}, h_k \rangle|$$

$$+ |\langle f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}, g - h_k \rangle|$$

Cauchy Schwarz

$$\leq \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}\| \|g - h_k\|$$

$$\leq 2M\varepsilon$$

$$\leq \varepsilon + 2M\varepsilon$$

Donc $(\langle f_{\varphi(n)}, g \rangle)_n$ est de Cauchy,
donc, comme H est complet, converge.

Notons $L(g)$ sa limite.

* Conclusion

L est une forme bilinéaire continue
sur H ,

car $L(g)$

Par le théor

$L(g) = \langle$

$\forall g \in H$

On a

Application

$C \subseteq H$ com

$\mathcal{I}$ différent

colonne.

Lemme

En effet

fermé d

projection

car $|L(g)| = |\langle f_p(n), g \rangle| \leq \|f_p(n)\| \|g\|$.

Par le théorème de représentation de Riesz,

$L(g) = \langle f, g \rangle$ pour une $f \in H$.

On a bien alors $f_n \rightarrow f$ - $\square$

Application Soit H un Hilbert réel, $C \subseteq H$ convexe fermé non vide ni borné J différentiable, convexe sur H et coercive. Alors elle admet un minimum.

Lemme Si $f_n \rightarrow f$, alors $f \in \overline{\text{Conv}(\{f_n, n \in \mathbb{N}\})}$.

En effet, soit C l'enveloppe convexe fermée de $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, soit P_C la projection orthogonale sur C .

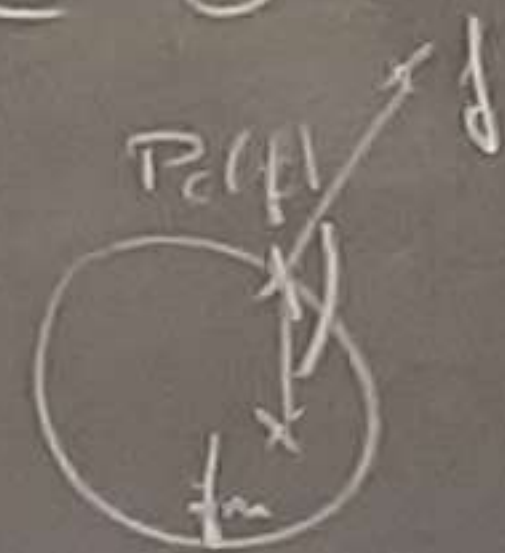
Par le théorème de PSCF,

$\langle f_n - P_C(f), f - P_C(f) \rangle \leq 0$

À la limite faible,

$\|f - P_C(f)\|^2 = 0$

d'où $f = P_C(f) \in C$.



Preuve de l'application

Soit $(u_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ minimisante

pour $\inf_C J \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(u_n) est bornée, car C l'est.

Donc $u_p(n) \rightarrow u$ par le théorème 1

avec donc de plus $u \in \overline{\text{Conv}(\{u_n, n \in \mathbb{N}\})}$.

Alors : $J(u_n) \geq J(u) + \langle \nabla_x J, u_n - u \rangle$

Pour $n \rightarrow \infty$, on a $\inf J \geq J(u)$

d'où $J(u) = \inf J \geq \inf J$

et le minimum est atteint en u .

Remarque Si H n'est plus séparable, le théorème est vrai.

Soit $\tilde{H} = \overline{\text{Vect}\{f_n, n \in \mathbb{N}\}}$ séparable.

On a $f_p(n) \rightarrow f \in \tilde{H}$.

Par TSO, $H = \tilde{H} \oplus \tilde{H}^\perp$.

Alors pour $h = h_n + h_\perp \in H$,

$\langle f_p(n), h \rangle = \langle f_p(n), h_n \rangle + \langle f_p(n), h_\perp \rangle$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $\langle f, h_n \rangle \quad \quad \quad 0$

$= \langle f, h_n \rangle + 0$ car $f \in \tilde{H}$

$= \langle f, h_n \rangle + \langle f, h_\perp \rangle$

$\langle f_p(n), h \rangle = \langle f, h \rangle$. $\square$