

Soit $n, p \geq 1$.

Def 1: Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts. Soit $f: U \rightarrow V$. On dit que f est un $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme si:

- ① f est bijective.
- ② f est de classe $\mathcal{C}^p$.
- ③ f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^p$.

Rq: Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ sont 2 ouverts et si $n \neq p$, alors il n'existe pas de fonction $f: U \rightarrow V$ bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f^{-1} soit $\mathcal{C}^1$.

I. Inversion locale.

A) Théorème d'inversion local. [Rou] p. 138 [Gou] p. 311

Th 2: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $Jf(a)$ est inversible. Il existe alors un ouvert V contenant a (et contenu dans U) et un ouvert W contenant $b = f(a)$ tels que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V sur $W = f(V)$.

On a ainsi l'équivalence $\begin{cases} x \in V \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in W \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$.

Rq: Dans le théorème précédent, on peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$ par $k \in \mathbb{N}, +\infty$.

Z. Dans le th. précédent, on a pas forcément $V = U$.

Exemple 3: L'application $f: (x, y) \mapsto (s, p) = (x+y, xy)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $U = \{x > y\}$ sur $V = \{s^2 - 4p > 0\}$.

Application 4: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f: E \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in E, Df(x) \in O(E)$. Alors f est une isométrie affine de E sur E .

Corollaire 5: (Application ouverte). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\forall x \in U, Df(x)$ est inversible, alors f est ouverte.

Lemma 6: (Réduction des formes quadratiques).

Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Soit $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$.
 $M \mapsto {}^t M A_0 M$.
 Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\psi: V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall A \in V, A = {}^t \psi(A) A_0 \psi(A)$.

Lemma 7: (Morse). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Supposons que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique $D^2 f(0)$ soit non dégénérée et de signature $(p, n-p)$. Alors il existe φ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de l'origine tel que $\varphi(0) = 0$ et tq $f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(x)^2 - \sum_{k=p+1}^n \varphi_k(x)^2$.
DEY 4.

B) Théorème d'inversion global.

Th 8: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est injective sur U et que $\forall x \in U, Df(x)$ est inversible. Alors, l'ensemble image $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $f(U)$.

Exemple 9: $\varphi:]0, +\infty[\times]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[\times]0, +\infty[$
 $(x, y) \mapsto (xy, x(1-y))$
 est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

App 10: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi = f - \text{id}$ est k -contractante ($0 < k < 1$). Alors f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

II. Fonctions implicites.

A) Fonctions implicites en dimension 2 [Rou], [ACU], [Gad]

Th 11: (Fonctions implicites). Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fct^o de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe un point $(x_0, y_0) \in U$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert V de U contenant (x_0, y_0) , un intervalle I contenant x_0 et une fct^o $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x, y) \in V$, $f(x, y) = 0$ ssi $x \in I$ et $y = \varphi(x)$.

Exemple 12: Considérons $f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Prenons $(x_0, y_0) = (0, 1)$. prenons $I =]-1, 1[$ on a alors $y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Corollaire 13: Sous les hypothèses précédentes on a $\forall x \in I$, $f(x, \varphi(x)) = 0$ et donc $\forall x \in I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$.

App P^o 14: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$. Alors, il existe deux voisinages ouverts U, V de 0 dans $\mathbb{R}$ et φ de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall x \in U$, $\varphi(x)$ est l'unique solution $y \in V$ telle que $f(x, y) = 0$ et on a $\varphi(x) = -x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^2)$.

B) Fonctions implicites en dimension ≥ 2 .

Th 15: (Fonctions implicites). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Soit $(a, b) \in U$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice Jacobienne $J_y f(a, b)$ est inversible. Alors l'équation $f(x, y) = 0$ peut s'exprimer localement par rapport aux variables y i.e. il existe

un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^n$ et W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $V \times W \subset U$ et $J_y f(x, y)$ inversible $\forall (x, y) \in V \times W$ et une unique application $\varphi: V \rightarrow W$ telle que $(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \text{ssi } (x \in V, y = \varphi(x))$. de plus, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V .

Rem: Dans le th. précédent, on peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}, +\infty$.

Proposit^o 16: Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe un point $(x_0, y_0) \in U$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors la droite tangente à $\mathcal{C} = \{f(x, y) = 0\}$ en (x_0, y_0) a pour équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

Exemple 17: (Folium de Descartes).

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$. Soit $(a, b) \in C$ tel que $3(b^2 - a) \neq 0$. Alors l'équation de la tangente à C en (a, b) est $(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0$.

III. Extrema - liés. [Rou] + [FGN]

Th 17: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $g_1, \dots, g_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classes $\mathcal{C}^1$. Soit $\Gamma = \{x \in U / g_1(x) = \dots = g_n(x) = 0\}$. Soit $a \in \Gamma$.

Supposons que :

- ① $f|_U$ admet un extremum relatif en a .
 ② La famille $Dg_1(a), \dots, Dg_n(a)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Df(a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Dg_i(a).$$

Application 19 : Soit $n \geq 2$.

Prenons $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \det(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Soit B la boule unité fermée.

Soit S la sphère unité fermée.

(F&N)

Soit $(H) : \sum_{i=1}^n x_i = 0$.

DEV 2

Prenons $g : x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$.

Ainsi $S = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) = 0\}$.

Alors, V admet un maximum sur B atteint en un point de $S \cap H$.