

245: Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Dans toute la leçon, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

I - Holomorphies et intégrales curvilignes

① Fonctions holomorphes [QQ]

Déf 1: Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $a \in \Omega$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe. On l'écrit alors $f'(a)$ et on note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur tout Ω .

Prop 2: Toute fonction polynomiale ainsi que toute fonction $\mathbb{C}$ -analytique est holomorphe.

Ex 3: L'exponentielle complexe $z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ est holomorphe et est sa propre dérivée.

Prop 4: Tout comme la dérivation sur $\mathbb{R}$, l'holomorphie est stable par somme, produit, quotient (ne s'annulant pas), et inversion (si dérivée non nulle).

Th 5: (Cauchy-Riemann) Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ on peut considérer

$\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (\operatorname{Re}(f(x+iy)), \operatorname{Im}(f(x+iy))) = (P(x, y), Q(x, y))$. L'ASSE:

(1) $\tilde{f}$ est différentiable avec $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

(2) f est holomorphe.

Cor 6: Les fonctions $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto \operatorname{Re} z$ ne sont pas holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Th 7: Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. La fonction $L: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \log|z| + i\theta(z)$
 où $\theta(z)$ est l'argument principal de z , est holomorphe sur Ω , de dérivée $L'(z) = 1/z$, et vérifie $\forall z \in \Omega, e^{L(z)} = z$.

Rq 8: L est appelée détermination principale du logarithme, mais ne vérifie pas $L(ab) = L(a) + L(b)$, comme on peut le voir avec $a = e^{2i\pi/4}$ et $b = e^{3i\pi/4}$.

② Intégrales curvilignes [QQ]

Dans toute la leçon, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ désigne une courbe, i.e. une application continue de $\mathbb{R}$ par morceaux. On note $\gamma^* = \gamma([a, b])$ son image et on dit que γ est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Déf 9: Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$. L'intégrale curviligne de f selon γ est le nombre $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \gamma'(t) \cdot f(\gamma(t)) dt$.

Prop 10: Si $f \in H(\Omega)$, alors $\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Prop 11: Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytique sur Ω et γ fermée.

Alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Déf 12: Supposons γ fermée et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. On définit l'indice de γ par rapport à a par $I(a, \gamma) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$.

Th 13: Supposons γ fermée. La fonction $f: a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* \mapsto I(a, \gamma)$ est continue, constante à valeurs dans $\mathbb{Z}$ sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et nulle sur celle qui est non bornée.

II - Analyticit  et conséquences

① Formules de Cauchy [QQ]

Th 14: (Cauchy convexe) Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$. Soit $f \in H(\Omega)$ et $a \in \Omega$ et γ une courbe fermée d'image $\gamma^* \subset \Omega$.

Alors: (1) $\exists F \in H(\Omega), \forall z \in \Omega, F'(z) = f(z)$

(2) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

Th 15: (Cauchy local). Soit $f \in H(\Omega)$ et γ décrivant le contour d'un disque $D(a, r) \subset \Omega$ orienté positivement. Alors, $\forall z \in D(a, r), f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$

Cor 16: Toute fonction $f \in H(\Omega)$ est analytique, i.e. $\forall a \in \Omega, \exists r > 0, \forall z \in D(a, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ avec de plus $\forall n \geq 0, a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$ à $z \in D(a, r)$.

Cor17: (Inégalités de Cauchy) Sous les mêmes notations, en posant $M(\rho) = \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)|$, on a $\forall n \geq 0, |a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}$.

Th18: (Liouville) Soit $f \in H(\mathbb{C})$.

Alors: f est soit non bornée, soit constante.

Cor19: Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Cor20: Soit $f \in H(\mathbb{C})$ non constante. Alors $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Th21: (Hédomorphie sous l'intégrale)

Soit (X, μ) un espace mesuré et $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tel que:

(1) $\forall z \in \Omega, f(z, \cdot) \in L^1(\mu)$;

(2) Pour presque tout $t \in X, f(\cdot, t) \in H(\Omega)$;

(3) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g_K \in L^1(\mu)$ tel que

$\forall z \in K, \forall t \in X, |f(z, t)| \leq g_K(t)$.

Alors: La fonction $F: z \in \Omega \mapsto \int_X f(z, t) dt$ est hédomorphe sur

Ω de dérivée $F'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} f(z, t) dt$ bien définie.

Cor22: Les fonctions $\Gamma: z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ et $\zeta: s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$

sont bien définies et hédomorphes respectivement sur les demi-plans $\Re z > 0$ et $\Re z > 1$.

2. Principe des zéros isolés [QQ]

Th23: (Zéros isolés) On suppose Ω connexe. Soit $f \in H(\Omega)$ non nulle. Alors l'ensemble $Z(f) = f^{-1}(0)$ est discret, donc en particulier au plus dénombrable.

Cor24: (Principe du prolongement analytique)

On suppose Ω connexe et on se donne $f, g \in H(\Omega)$.

On suppose que $f = g$ sur un sous-ensemble $A \subset \Omega$ possédant un point d'accumulation. Alors $f = g$ sur Ω .

Cor25: L'anneau $(H(\Omega), +, \times)$ est intègre.

Th26: Il existe une unique fonction hédomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ qui coïncide avec Γ sur $\Re z > 0$.

Prop27: Il existe un unique prolongement holomorphe de $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ au demi-plan $\Re(s) > 0$.

Prop28: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact. Alors $\hat{f}$ n'est pas à support compact.

3. Principe du maximum [QQ]

Th29: Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné, et $f \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Alors: $\sup_{\bar{\Omega}} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$

Cor30: (Lemme de Schwarz) Soit $f \in H(\mathbb{D})$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leq 1$. Alors $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leq |z|$; $|f'(0)| \leq 1$, et si on a égalité en un point $z_0 \in \mathbb{D}^*$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors $f: z \mapsto \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$.

Prop31: Les bihédomorphismes du disque $\mathbb{D}$ sont exactement les transformations $u \mapsto a$ où $u \in \mathbb{D}$ et $\varphi_a: z \in \mathbb{D} \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ pour un $a \in \mathbb{D}$.

III. Fonctions méromorphes

1. Séries de Laurent [QQ]

Th32: Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ où $a \in \Omega$, et $r > 0$ tel que $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$.

Alors il existe une unique suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tel que

$\forall z \in D(a, r) \setminus \{a\}, f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$.

Déf33: Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est pour f :

(1) une singularité essentielle si $\{n \in (-N, +\infty) \mid c_n \neq 0\} = +\infty$;

(2) un pôle d'ordre $m \geq 1$ si $\max\{k \in \mathbb{N} \mid c_{-k} \neq 0\} = m$;

(3) une singularité éffaçable si $c_n \neq 0 \Rightarrow n \geq 0$.

Prop34: Si f a une singularité éffaçable en $a \in \Omega$, alors

$f = g$ sur $\Omega \setminus \{a\}$ avec $g \in H(\Omega)$.

Ex35: $f(z) = e^{1/z}$ a une singularité essentielle en 0.

Prop36: Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ avec a singularité essentielle de f .

Alors $f(\Omega \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Déf 37: Une fonction f est dite méromorphe si $f \in H(\Omega \setminus A)$ où A est discret et chaque point de A est un pôle de f . On appelle alors pour $a \in A$ le résidu de f en a le nombre $\text{Res}(f, a) = C_{-1}$ où $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est le développement en série de Laurent de f en a .

2 Formule des résidus [99]

Prop 40: Soit $f = g/h$ où $g, h \in H(\Omega)$ avec $a \in \Omega$ un point tel que $h(a) = 0, g'(a) \neq 0$ et $g(a) \neq 0$. Alors f est méromorphe avec a comme pôle simple de résidu $\text{Res}(f, a) = g(a)/h'(a)$.

Prop 41: La fonction Γ du point 26 est méromorphe sur $\mathbb{C}$ à pôles simples.

Th 42: (des résidus) Soit $f \in H(\Omega \setminus A)$ méromorphe de pôles A et d'une courbe fermée de $\Omega + \gamma$ $\gamma^* \cap A = \emptyset$ et $\forall z \notin \Omega, I(z, \gamma) = 0$.

Alors: $\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in A} I(a, \gamma) \text{Res}(f, a)$ et la somme est finie.

Cor 43: Soit $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ méromorphe de pôles A . On suppose A fini et $A \cap \mathbb{R} = \emptyset$, ainsi que $f|_{\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$ et $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$.

Alors: $\forall x > 0, \hat{f}(x) = -2i\pi \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) \text{ où } f_n(t) = f(t) e^{itx}$.

Ex 44: Si $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, alors $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|x|/\sqrt{2}} (\cos \frac{|x|}{\sqrt{2}} + \sin \frac{|x|}{\sqrt{2}})$.

III - Espaces de fonctions holomorphes

1 Topologie u.c.

Déf 45: Soit $(f_n)_n \in (C^{\infty})^{\mathbb{N}}$ et $f \in C^{\infty}$. On note $f_n \xrightarrow{u.c.} f$ si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers f .

Th 46: (Weierstrass) Soit $(f_n)_n \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $f \in C^{\infty}$ tel que $f_n \xrightarrow{u.c.} f$.
Alors: $f \in H(\Omega)$ et $f'_n \xrightarrow{u.c.} f'$.

Rq 47: On peut montrer que cette topologie est complète pour une certaine métrique, mais qu'elle n'est pas normable.

2 Espace de Bergman [BERN]

Déf 48: On note $B^2 = H(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D}, \lambda_2)$ et on appelle cet espace l'espace de Bergman (du disque unité).

Lemme 49: Soit $K \subset \mathbb{D}$ compact. Il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in B^2, \|f\|_{\infty, K} \leq C \|f\|_2$.

Th 50: B^2 est un espace de Hilbert dont une base est donnée par les $(e_n)_{n \geq 0} = (z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n)_{n \geq 0}$.

Cor 51: $\forall f \in B^2, \forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi(1-\bar{z}w)^2} d\lambda_2(w)$.

3 Théorèmes de Paley Wiener [LI]

Th 52: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact $[-a, a], a > 0$.

Alors: $\hat{f}$ se prolonge en une fonction $F \in H(\mathbb{C})$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}, |F(z)| \leq C e^{2\pi a |\text{Im} z|}$ où $C > 0$.

Th 53: Soit $F \in H(\mathbb{C})$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}, |F(z)| \leq C e^{2\pi a |\text{Im} z|}$ pour des constantes $C, a > 0$, et telle que $F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$.

Alors: $f = \mathcal{F}^{-1} F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ et est à support compact $[-a, a]$.

2 Formule des résidus

~~Def 34: Si $a \in \mathbb{C}$ est un pôle de $f \in H(\mathbb{D}_r) \setminus \{a\}$~~

Références :

- [QQ] Analyse complexe, Hervé et Martine Quéffelec.
- [AT] Amar et Flatheron, Analyse complexe
- [LI] Li, Cours d'analyse fonctionnelle.
- [CRF] Courbon et Reynaud-Ferville, 20/20 avec la calculatrice TI-82 (pour le point 2 notamment)
- [BERN] Bernis, 40 développements pour l'agrégation.