

213: Espaces de Hilbert. Exemple d'applications.

I - Espaces préhilbertiens

① Orthogonalité

Déf 1: Soit H un K -ev. Un produit scalaire (resp. hermitien si $K = \mathbb{C}$) sur H est une application bilinéaire (resp. hermitienne) définie positive. Un espace muni d'une telle application est appelé préhilbertien.

Déf/Prop 2: Soit H un espace préhilbertien pour $(\cdot | \cdot)$. L'application $x \in H \mapsto \|x\| := (x|x)$ définit une norme sur H appelée norme hilbertienne.

Prop 3: Une norme hilbertienne vérifie $\forall x, y \in H$,

- (1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y)$
- (2) $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
- (3) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\operatorname{Re}(x|y)$

Déf 4: Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont dits orthogonaux si $(x|y) = 0$. Deux parties $A, B \subset H$ sont dites orthogonales si $\forall (x, y) \in A \times B, (x|y) = 0$, et l'orthogonal de A est la partie $A^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in A, (x|y) = 0\}$.

Prop 5: Si $K = \mathbb{R}$, on a le théorème de Pythagore:

$$\forall x, y \in H, x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Prop 6: Si $A \subset H$, $A^\perp$ est fermé dans H (pour $\|\cdot\|$) (et c'est un sev).

② Espaces de Hilbert

Déf 7: Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour sa norme hilbertienne.

Ex 8: Tout espace euclidien ou hermitien est de Hilbert.

D'après Riesz-Fischer, tout espace $L^2(\mu)$ pour μ une mesure positive est un espace de Hilbert, en particulier l'espace $L^2(\mathbb{Z})$. Le produit scalaire associé est $(f, g) = \int f \bar{g} d\mu$.

Prop 8: Tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.

II - Le théorème de projection et ses conséquences.

① Projection sur un convexe fermé

A partir de maintenant $(H, (\cdot | \cdot))$ désigne un K -espace de Hilbert où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(\cdot | \cdot)$ est scalaire ou hermitien.

Th 10: Soit $C \subseteq H$ une partie convexe fermée non vide. Alors: Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| = \operatorname{dist}(x, C),$$

ou le note alors $y = p_C(x)$ et on a $\forall y \in C$,
 $y = p_C(x) \Leftrightarrow (\forall z \in C, \operatorname{Re}(x - y | z - y) \leq 0)$

Rq 11: Dans la preuve on ne se sert que de la complétude de C , pas de H tout entier.

La caractérisation du projeté s'appelle caractérisation de l'angle obtus. (cf annexe)

Prop 12: L'application $p_C: H \rightarrow C$ du théorème 10 est 1-lipschitzienne donc continue.

② Projection sur un sous-espace fermé

Th 13: Soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé de H .

Alors: L'application $p_F: H \rightarrow F$ du théorème 10 est linéaire, continue et $\forall x \in H, \forall y \in F, y = p_F(x) \Leftrightarrow x - y \in F^\perp$

Th 14: Sous les mêmes hypothèses, on dispose de la somme directe topologique (i.e. les projections sont continues):
 $H = F \oplus F^\perp$

Cor 15: Soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel. Alors $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.
 Et donc F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

③ Applications linéaires d'un espace de Hilbert

Th 16: (de représentation de Riesz) Soit $\varphi \in H^*$.

Alors: Il existe un unique $y \in H$ tel que $\varphi: x \in H \mapsto (x|y)$

Cor 17: H^* est isométriquement isomorphe à H .

Déf/Prop 18: Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ appelé l'adjoint de T tel que : $\forall x, y \in H, (Tx|y) = (x|T^*y)$.
De plus, $\|T^*\| = \|T\|$ et $T^{**} = T$.

III. Bases hilbertiennes

① Familles orthonormées

On suppose désormais H de dimension infinie.

Déf 19: Soit $(x_i)_{i \in I} \in H^I$ où I est un ensemble d'indices quelconque non vide. Cette famille est orthonormée si :

- (1) $\forall i \in I, \|x_i\| = 1$
- (2) $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$

Ex 20: Dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}} = ((\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}})_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée.
Dans $L^2([0, 1])$, $(t \mapsto e^{2i\pi nt})_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée.

Prop 21: Toute famille orthonormée est libre.

Prop 22: Soit $(x_i)_{i \in I} \in H^I$ orthonormée. Pour tout $x \in H$,

$$\sum_{i \in I} |(x|x_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

où la somme est définie comme le sup sur les $J \subset I$ finis. C'est l'inégalité de Bessel.

Prop 23: Soit $x \in H$ s'écrivant $x = \sum_{n \geq 0} a_n x_n$ où $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n)_n$ est orthonormée dénombrable, la série étant H -convergente, alors pour tout $n \geq 0$, $a_n = (x|x_n)$ et si $F_n = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$ alors :

$$P_{F_n}: H \rightarrow F_n$$

$$x \mapsto \sum_{k=1}^n (x|x_k) x_k.$$

Cor 24: Sous ces hypothèses, l'application $H \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$
 $x \mapsto ((x|x_n))_{n \in \mathbb{Z}}$
est surjective.

② Familles totales

Déf 25: Une famille $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ est une base orthonormée si elle est orthonormée et totale, i.e. $\text{Vect}\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans H . On parle aussi de base hilbertienne.

Th 26: Soit $(e_n)_n \subset H$ une base orthonormée de H .

Alors : (1) $\forall x \in H, x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x|e_n) e_n$ (série H -convergente)

(2) $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(x|e_n)|^2$ (identité de Bessel-Parseval)

(3) $\forall x, y \in H, (x|y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x|e_n)(y|e_n)$ (série ACV)

Cor 27: Sous les mêmes hypothèses, l'application

$H \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme
 $x \mapsto (x|e_n)$ isométrique d'espaces de Hilbert.

Ex 28: Les familles de l'exemple 20 sont des bases hilbertiennes.

③ Existence de bases hilbertiennes

Déf 29: Un espace métrique est dit séparable s'il possède une famille dénombrable dense.

Prop 30: Tout espace de Hilbert séparable possède des bases hilbertiennes.

Prop 31: La complétude n'intervient pas ici, on ne se sert que du procédé de Gram-Schmidt.

Cor 32: Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes deux à deux en faisant correspondre leurs bases hilbertiennes.

IV - Exemples d'espaces de Hilbert

① $L^2(\mathbb{R})$ et la transformée de Fourier-Plancherel

Prop 33: $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert séparable.

Déf 34: La transformée de Fourier est l'application

linéaire continue: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$
 $f \mapsto \mathcal{F}f = \hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t) dt$

Th 35: (Plancherel)

Il existe une unique application linéaire continue $\mathcal{F}P: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge

$\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, appelée transformée de Fourier-Plancherel. De plus $\mathcal{F}P$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert au sens que: $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$,
 $\|\mathcal{F}P f\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.

Prop 36: Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\mathcal{F}P f \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}P f(t)}{2\pi} e^{itx} dt$.

et $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $(\mathcal{F}P f)g, f \times (\mathcal{F}P g) \in L^1(\mathbb{R})$ et
 $(f, \mathcal{F}P g)_{L^2} = (\mathcal{F}P f, g)_{L^2}$.

Déf 37: Soit $A > 0$. On note $BL_A^2 := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \mathcal{F}P f \in L^2([-A, A])\}$.

Lemme 38: $BL_A^2 \in C_0(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_2$ y est plus fine que $\|\cdot\|_A$,
 et BL_A^2 est un espace de Hilbert pour $\|\cdot\|_2$.

Th 39: (Échantillonnage de Shannon)

L'application $f \in BL_A^2 \mapsto (f(\frac{n\pi}{A}))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie
 et tout $f \in BL_A^2$ s'écrit: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\frac{n\pi}{A}) \frac{\sin(Ax - n\pi)}{Ax - n\pi}$

② Théorie hilbertienne des séries de Fourier

Déf 40: On note $L_{2\pi}^2$ l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ presque partout 2π -périodiques.

Prop 41: $L_{2\pi}^2$ est un espace de Hilbert séparable dont une base hilbertienne est donnée par $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Th 42: (Parseval) Soit $f \in L_{2\pi}^2$.

(1) $S_N(f) \xrightarrow{L^2} f$ où $S_N f$ est la N-ième série de Fourier de f ,
 i.e. $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ dans $L_{2\pi}^2$

(2) $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Ex 43: La formule (2) permet par exemple de calculer $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

③ Espace de Bergman

Déf 44: On note $B^2 = H(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D}, \lambda^2)$.

Lemme 45: Soit $K \subset \mathbb{D}$ un compact. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall f \in B^2, \|f\|_{\infty, K} \leq C \|f\|_2$

Th 46: B^2 est un sous-espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{D}, \lambda^2)$ dont une base hilbertienne est donnée par
 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^{n+1})_{n \geq 0}$.

Cor 47: Pour tout $f \in B^2, \forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi(1-z\bar{w})^2} d\lambda(w)$

DEV 1

DEV 2

Annexe:

